



ITALMATICA

Lingua e strutture
dei testi scolastici
di matematica

a cura di
**Silvia Sbaragli
e Silvia Demartini**

ITALMATICA
**Lingua e strutture dei testi
scolastici di matematica**

a cura di Silvia Sbaragli e Silvia Demartini

EDIZIONI DEDALO

La pubblicazione rientra nel progetto di ricerca *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* condotto dal Centro competenze didattiche della matematica e dal Centro competenze didattiche dell'italiano lingua di scolarizzazione del DFA (Dipartimento formazione e apprendimento) della SUPSI (Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana), finanziato dal FNS, Fondo Nazionale Svizzero per la ricerca scientifica (progetto 176339, periodo 2018-2022, responsabile Prof.ssa Silvia Sbaragli). Questo volume è stato pubblicato grazie al finanziamento del FNS e al sostegno del DFA-SUPSI.

Progettazione grafica e impaginazione: Luca Belfiore

Si ringraziano per l'attento lavoro di lettura e di redazione Michele Canducci, Amos Cattaneo ed Elena Franchini.

Pur condividendo in generale e nello specifico tutti i temi di questo volume, per motivi redazionali e accademici, si precisa che Silvia Demartini e Silvia Sbaragli sono coautrici di tutto il testo.

Hanno contribuito alla stesura delle varie parti:

Michele Canducci	paragrafi 1.2, 2.4, 3.3, 4.1, 4.3.1, 5.2.3, 5.3.7, 5.5, 6.1 e 6.2.3.
Amos Cattaneo	paragrafi 4.1 e 5.5.1.
Angela Ferrari	paragrafi 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4.
Pier Luigi Ferrari	paragrafi 2.1, 2.2 e 2.3.
Simone Fornara	paragrafo 6.3.
Elena Franchini	paragrafi 4.1 e 4.3.3 e capitolo 8.
Daniele Puccinelli	paragrafo 4.3.1.
Dario Raffaele	paragrafi 5.2.3.3, 5.2.3.4 e 6.2.2.2.
Andrea Rocci	paragrafi 3.3, 5.5.2 e 6.1.2.
Matteo Viale	paragrafi 3.1 e 3.2.

Per citare i singoli contributi, insieme alle autrici e agli autori di cui sopra si trovano le specifiche attribuzioni, occorre sempre inserire come coautrici le curatrici dell'opera; indicare i nomi in ordine alfabetico.

© 2021 Edizioni Dedalo
divisione della Dedalo litostampa srl
Viale Luigi Jacobini 5, 70132 Bari
www.edizionidedalo.it

Tutti i diritti sono riservati.

Riproduzione vietata ai sensi di legge (art. 171 della legge 22 aprile 1941, n. 633)

Indice

Premessa	9
1. Il progetto <i>Italmatica</i>. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico	11
1.1 Il senso di un dialogo fra "mondi", dalla ricerca alla didattica	11
1.2 Complessità e ricchezza: la costruzione di una chiave di lettura condivisa	12
1.3 Un lungo percorso: dai primi lavori all'idea del progetto <i>Italmatica</i>	13
2. Comunicare la matematica: lingua speciale e testo scolastico	15
2.1 Tratti peculiari della lingua della matematica	15
2.2 Cenni storici sull'evoluzione del linguaggio della matematica: il ruolo delle notazioni e dei simbolismi	18
2.3 La natura della matematica come componente che influenza il suo linguaggio	21
2.4 L'approccio semio-cognitivo di Raymond Duval	26
2.5 Il fondamentale ruolo del registro figurale nell'apprendimento della geometria	30
2.6 Le difficoltà linguistiche nell'apprendimento della matematica	32
2.6.1 Lingua come tramite, lingua come (possibile) ostacolo	32
2.6.2 La matematica tra parole e termini: lessico specialistico e lessico dell'uso comune	34
2.6.3 Morfosintassi peculiare del linguaggio della matematica	35
2.6.4 Educazione linguistica e linguaggio della matematica: l'unione delle competenze	37
3. Il testo scolastico	39
3.1 La lingua dei libri di testo scolastici	39
3.2 L'italiano dei libri di testo scolastici di matematica	42
3.3 Gli aspetti multimodali del testo scolastico di matematica	46
3.3.1 Relazioni discorsive multimodali e conversione semiotica nei libri di testo di matematica	48
4. Il corpus, i metodi, gli strumenti, i criteri di scelta e di annotazione	51
4.1 Selezione, costruzione e composizione del corpus	51
4.2 Le ragioni di un approccio misto <i>corpus based</i> e <i>corpus driven</i>	56
4.3 Metodi, criteri e strumenti per l'analisi testuale, lessicale, didattico-disciplinare	56
4.3.1 Metodi, criteri e strumenti per le analisi testuali	57
4.3.2 Metodi, criteri e strumenti per le analisi lessicali e morfosintattiche	60
4.3.3 Metodi, criteri e strumenti per l'analisi didattico-disciplinare	65
5. Dimensioni di analisi del testo scolastico di geometria	71
5.1 L'architettura del testo: le sue unità (forme e funzioni)	71
5.2 I movimenti testuali (macroatti)	73
5.2.1 Espositivo-esplicativo	74
5.2.2 Direttivo	80
5.2.3 Dati quantitativi sui movimenti testuali (macroatto) nel corpus	82
5.2.3.1 L'evoluzione dei movimenti testuali (macroatti) nel corpus italiano	82
5.2.3.2 L'evoluzione dei movimenti testuali (macroatti) nel corpus svizzero	85
5.2.3.3 L'evoluzione dei movimenti testuali (macroatti) iniziali	87
5.2.3.4 Le sequenze di tre macroatti consecutivi	89

5.3	Gli enunciati (microatti)	91
5.3.1	Definizione	93
5.3.2	Proposizione	97
5.3.3	Denominazione	98
5.3.4	Esemplificazione	100
5.3.5	Notazione	101
5.3.6	Enunciati da completare	102
5.3.7	Dati quantitativi sugli enunciati del corpus	104
5.3.7.1	L'evoluzione degli enunciati nel corpus italiano	104
5.3.7.2	Confronto degli enunciati nel corpus italiano e nel corpus svizzero	107
5.3.8	La densità dei microatti	108
5.4	Fenomeni informativi interni ad alcuni tipi di enunciati	110
5.4.1	Analisi informativa delle definizioni: una sistemazione di alcuni fenomeni significativi	111
5.4.1.1	Tendenze informative: distribuzione del definiendum all'interno dell'enunciato	111
5.4.1.2	Segmentazione della definizione	114
5.4.1.3	Articolazione logica della definizione	117
5.4.1.4	Gerarchizzazione delle informazioni: il caso degli incisi	119
5.4.1.5	L'inquadramento delle definizioni	124
5.4.1.6	Riprese anaforiche	126
5.4.2	Analisi informativa delle proposizioni: una sistemazione di alcuni fenomeni significativi	127
5.4.2.1	Tendenze informative: compattezza e articolazione	127
5.4.2.2	L'articolazione logico-argomentativa interna: le frasi complesse	129
5.4.2.3	L'articolazione logico-argomentativa interna: le relazioni logiche più rilevanti	130
5.4.3	Analisi informativa delle esemplificazioni: una sistemazione di alcuni fenomeni significativi	133
5.4.3.1	La segnalazione linguistica dell'esemplificazione	134
5.4.3.2	Come parla l'esemplificazione al lettore	136
5.4.3.3	Esemplificazioni in praesentia e in absentia	138
5.4.3.4	La struttura interna: esemplificazioni (informativamente) semplici e articolate	141
5.4.3.5	I vari registri di rappresentazione	143
5.5	Relazioni tra parti linguistiche del testo e figure	146
5.5.1	Componente linguistica e componente figurale nel corpus DFA-Italmatica	146
5.5.2	Gli aspetti multimodali nella relazione testo-figura	155
5.5.2.1	Uso del colore in funzione di similarità	156
5.5.2.2	Prossimità di elementi nell'organizzazione spaziale	157
5.5.2.3	Segnalazione grafica attraverso linee orientate	159
6.	Approfondimenti: tre casi di studio	162
6.1	Il caso del movimento testuale logico-argomentativo	162
6.1.1	Una lettura delle modalità dei movimenti logico-argomentativi nei libri di testo: dal fare all'astrarre	162
6.1.1.1	Introduzione interdisciplinare al tema dell'argomentazione	163
6.1.1.2	Dal fare all'astrarre	165
6.1.1.3	Criteri "italmatici" di analisi delle modalità dei movimenti testuali logico-argomentativi	166
6.1.1.4	Esempi di modalità dei movimenti testuali logico-argomentativi analizzati secondo criteri "italmatici"	168

6.1.1.5	L'evoluzione dei movimenti testuali logico-argomentativi nel corpus	174
6.1.2	Una lettura dei movimenti testuali logico-argomentativi: inventio, dispositio ed elocutio	180
6.1.2.1	Inventio, dispositio ed elocutio	181
6.1.2.2	Breve digressione: categorie antiche in chiave multimodale	184
6.1.2.3	L'analisi di un esempio	185
6.1.3	Riflessioni conclusive in prospettiva didattica	190
6.2	Il caso dell'enunciato definizione	191
6.2.1	Dal descrivere al definire in matematica	192
6.2.2	Le definizioni dei testi scolastici: strutture, ridondanza, lessico	194
6.2.2.1	Le strutture	195
6.2.2.2	La ridondanza informativa	200
6.2.2.3	Il lessico delle definizioni	203
6.2.2.4	La leggibilità delle definizioni	209
6.2.3	Aspetti di numero nelle definizioni	212
6.2.3.1	La categoria grammaticale di numero	212
6.2.3.2	Omogeneità-disomogeneità di numero e aderenza forma-contenuto	214
6.2.3.3	La distribuzione delle categorie omogenei plurale e disomogenei nei libri di testo	218
6.2.4	Per concludere: le difficoltà degli allievi nel definire in matematica	220
6.3	Usi interpuntivi nel testo di matematica	222
6.3.1	Le problematicità interpuntive nella scrittura di oggi	222
6.3.2	La virgola al posto di segni più forti	223
6.3.3	La virgola tra soggetto e predicato	229
6.3.4	Altri usi problematici della virgola	230
6.3.5	I due punti e gli elenchi	232
6.3.6	Conclusioni	237
7.	Tra le parole del corpus: lessico e leggibilità	238
7.1	La geometria attraverso le parole: rilievi sul vocabolario del corpus	239
7.1.1	Dati quantitativi globali: dimensione e ampiezza	239
7.1.2	Dati qualitativi globali: i lemmi più frequenti	242
7.2	Leggibilità e qualità globale del lessico, tra Vocabolario di Base e tecnicismi	246
7.2.1	Leggibilità e parole riconducibili al VbB nel corpus italiano	247
7.2.2	Leggibilità e parole riconducibili al VdB nel corpus svizzero	251
7.2.3	Ulteriori indizi di complessità, tra lessico e sintassi	253
7.3	Misurazioni lessicometriche significative	255
7.3.1	Ricchezza lessicale	255
7.3.2	Densità lessicale	256
7.3.3	Quantificazione e distribuzione delle parti del discorso	257
7.4	Particolarità del lessico del testo scolastico di geometria: casi specifici	259
7.4.1	Le associazioni di parole con il termine poligono/-i	259
7.4.2	Tecnicismi superflui e parole che ingannano: dati quantitativi su alcuni casi	262
7.4.3	I connettivi consecutivi	265
7.5	Il lessico della geometria nella prospettiva di un piano di alfabetizzazione lessicale	268
8.	Analisi didattico-disciplinare dei libri di testo del corpus	271
8.1	Elementi concettuali	273
8.1.1	Scorrettezze o imprecisioni matematiche	274
8.1.2	Omissioni o impliciti	279
8.1.3	Mancanza di coerenza del testo	286

8.1.4	Esposizioni restrittive	293
8.1.5	Ridondanze	295
8.1.6	Eccessiva casistica	296
8.1.7	Argomentazioni lacunose	298
8.2	Elementi linguistici	301
8.2.1	Eccessiva nomenclatura	302
8.2.2	Utilizzo di terminologia vincolante o errata	304
8.2.3	Complessità morfosintattica	309
8.3	Elementi grafico-figurali	313
8.3.1	Rappresentazioni figurali fuorvianti o errate di enti geometrici	315
8.3.2	Elementi grafici o figure che non veicolano un messaggio corretto	319
8.3.3	Notazioni fuorvianti o incoerenti	320
8.3.4	Incoerenza tra elementi grafico-figurali e componente linguistica del testo	324
Per concludere: il testo scolastico di matematica e i suoi fruitori		326
Bibliografia		330
Bibliografia corpus DFA-Italmatica		350

«Sovente ho messo piede sui ponti che uniscono (o dovrebbero unire) la cultura scientifica con quella letteraria scavalcando un crepaccio che mi è sempre sembrato assurdo. C'è chi si torce le mani e lo definisce un abisso, ma non fa nulla per colmarlo; c'è anche chi si adopera per allargarlo, quasi che lo scienziato e il letterato appartenessero a due sottospecie umane diverse, reciprocamente alloglotte, destinate ad ignorarsi e non interfeconde. È una schisi innaturale, non necessaria, nociva [...]».

(P. Levi, *L'altrui mestiere*, Torino, Einaudi, 1985, p. 14)

Premessa

Questo volume nasce con l'intento primario di raccogliere i risultati del progetto di ricerca *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la ricerca scientifica, 2018-2022), sviluppato presso il Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera italiana. La ricerca è stata condotta da un gruppo eterogeneo di ricercatori in didattica della matematica, linguistica e *computer science*, e ha approfondito, nel suo insieme, l'analisi di un corpus di libri di testo scolastici di matematica in lingua italiana per la scuola primaria e per la secondaria di primo grado, optando in particolare per la parte di geometria e scegliendo come tema i *poligoni*. L'intento è stato quello di delineare come questi testi parlano al lettore, individuandone le caratteristiche costitutive, i modi e gli intenti, e focalizzando i limiti e le potenziali criticità che potrebbero far emergere possibili ostacoli per la comprensione da parte di allieve e allievi. Tali difficoltà possono dipendere da aspetti linguistico-comunicativi, da imprecisioni o incoerenze matematiche o didattiche, o dalla coesistenza di questi elementi, realizzati secondo modalità diverse.

La prospettiva alla base di questo libro parte da anni di lavoro sinergico tra l'*équipe* di ricercatori di due discipline, considerate dal senso comune assai distanti, la matematica e l'italiano, ed è animata da due intenzioni caratterizzanti: a un livello più generale, collocare il nostro lavoro nella lunga scia delle riflessioni che – lungo i secoli e fino agli anni recenti – hanno promosso una visione unificante dei saperi; a un livello più concreto e operativo, calare l'interdisciplinarietà in contesto didattico, indagando la lingua e altri aspetti della testualità matematica per come si presentano nei manuali scolastici.

Il volume riflette lo stile che ha caratterizzato il lavoro del gruppo di ricerca per l'intero progetto: lavorare congiuntamente tra le discipline, cercando di mettere in dialogo e integrare prospettive, saperi e metodi diversi, alla ricerca di uno sguardo comune. Sguardo, questo, che riteniamo sia efficace da assumere con sempre maggiore convinzione non solo per ripensare alla manualistica per la scuola, ma anche, più in generale, in contesto educativo, fra i banchi di scuola, per potenziare e vedere con occhi in parte nuovi le discipline e la loro didattica.

Le diverse voci, integrate e complementari, si alterneranno nei diversi capitoli, nei quali saranno toccati diversi aspetti. Dopo un primo capitolo illustrativo del progetto, i **capitoli 2 e 3** offriranno un quadro generale relativo al linguaggio della matematica e al testo scolastico, mentre il **capitolo 4** descriverà il corpus in esame, i criteri, gli strumenti e i metodi di analisi. Si passerà poi all'illustrazione dei risultati della ricerca, procedendo con un andamento che alterna descrizioni quantitative globali a rilievi qualitativi su livelli e fenomeni specifici. In particolare, il **capitolo 5**

proponrà l'analisi testuale dei libri, procedendo dalla mappatura dei movimenti testuali e degli enunciati matematici peculiari, per passare poi ad altri livelli di osservazione dell'organizzazione informativa; a questo seguirà il **capitolo 6**, dedicato ad approfondire alcuni casi di studio emersi nel capitolo precedente. Il **capitolo 7** sarà invece incentrato sulla caratterizzazione lessicale dei testi, sia dal punto di vista globale e quantitativo, sia concentrandosi su aspetti peculiari del lessico tecnico-specialistico della matematica, inserendo anche alcuni dati di leggibilità e alcune misurazioni lessicometriche significative. Da ultimo, prima delle conclusioni, il **capitolo 8** metterà al centro diversi tipi di imprecisioni e di incoerenze semantiche, cioè propriamente matematiche, che si realizzano in vari modi e che rappresentano un ulteriore aspetto critico nella comunicazione disciplinare veicolata dai testi.

Di seguito si elencano le ricercatrici e i ricercatori che hanno fatto parte del progetto.

Équipe di progetto. Silvia Sbaragli (responsabile), Elena Franchini, Michele Canducci, Amos Cattaneo, afferenti al Centro competenze didattiche della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana; Silvia Demartini, Simone Fornara, Luca Cignetti, afferenti al Centro competenze didattiche dell'italiano lingua di scolarizzazione del Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana.

Partner di progetto. Marco Costi, presidente del collegio cantonale dei direttori di scuola media del Canton Ticino; Angela Ferrari, dell'Istituto di Italianistica dell'Università di Basilea; Pier Luigi Ferrari, del Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica dell'Università del Piemonte Orientale; Alma Pedretti, aggiunta al Capo sezione delle scuole comunali del Canton Ticino; Daniele Puccinelli, del Dipartimento tecnologie innovative della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana; Andrea Rocci, dell'Istituto di argomentazione, linguistica e semiotica dell'Università della Svizzera italiana; Matteo Viale, del Dipartimento di Filologia classica e italianistica dell'Università di Bologna.

Silvia Demartini e Silvia Sbaragli

Il progetto *Italmatica*. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico

1.1 Il senso di un dialogo fra “mondi”, dalla ricerca alla didattica

Dei rapporti e, soprattutto, della separazione che intercorre tra pensiero scientifico e pensiero umanistico nel sentire comune e, a volte, nella didattica, si parla spesso. Questa frattura – frutto delle alterne vicende della storia del sapere e delle discipline – negli anni Cinquanta del Novecento è stata ben sintetizzata nella celebre immagine delle “due culture” (Snow, 2005): cultura umanistica e cultura scientifica in contrapposizione radicale e su binari paralleli destinati a non incontrarsi mai, e a non comunicare.

Per non parlare dei preconcetti legati alla sfera sociale, per cui, nel bene e nel male, e ciascuno coi pregiudizi legati agli stereotipi del suo ambito, scienziati e umanisti appartengono a mondi diversi. Ironicamente lo ha ricordato, negli anni '60, Italo Calvino, che di sé e della composizione della sua famiglia scriveva così:

Sono figlio di scienziati: mio padre era un agronomo, mia madre una botanica; entrambi professori universitari. Tra i miei familiari gli studi scientifici erano un onore; un mio zio materno era un chimico, professore universitario, sposato a una chimica (anzi ho avuto due zii chimici sposati a due zie chimiche); mio fratello è un geologo, professore universitario. Io sono la pecora nera, l'unico letterato della famiglia.

(Calvino, 2010, p. 18)

Se si considera poi che, anche in ambito intellettuale e didattico, vi sono tradizionalmente da una parte le scienze cosiddette “dure”, dall'altra gli studi umanistici, questa separazione non fa che venire alimentata e sostenuta. Su una simile antitesi si sono generate catene di luoghi comuni in diversi contesti: a scuola i bambini spesso si sentono, sin da molto piccoli, capaci in italiano “o” in matematica, come se una terza via quasi non fosse possibile o comunque fosse appannaggio solo dei “bravi”, e le famiglie ipotizzano strane genetiche delle attitudini (“Mio figlio non è bravo in matematica? Se penso a com'ero io è ovvio che sia così...”), mentre vengono attribuiti tratti di “facilità” o “difficoltà” alle discipline stesse, a volte senza che vi siano reali fondamenti. Atteggiamenti, questi, comunissimi, che cooperano al radicarsi di prospettive sbagliate, e che presto ingenerano disaffezione negli studenti, i quali, oltre a non apprezzare la vera essenza delle materie scolastiche, rischiano di allontanarsene irreparabilmente.

Negli ultimi decenni la sensazione è che le cose stiano davvero cambiando, non solo nella teoria, ma anche nel modo di concepire e di costruire il sapere in contesto didattico, complici le ricerche e le sperimentazioni avviate nel campo della didattica della matematica – disciplina che si è affermata con forza negli ultimi trent'anni – e quelle basate sull'idea di educazione linguistica trasversale che le Indicazioni

Nazionali italiane e i piani di studio di diversi Paesi hanno saputo accogliere. Certo, permangono alcune rigidità storicamente sedimentate: talvolta, soprattutto negli ordini secondari di scolarità, la matematica è ancora intesa e trasmessa come materia fredda e per lo più nettamente separata dall'espressione linguistica, e a volte dalla creatività e dall'interpretazione; per contro, il lavoro sulla lingua, al netto della grammatica, è associato alla compartecipazione, ai sentimenti, alle sensazioni positive e all'espressività. Tuttavia, nell'insieme, sia dal punto di vista della didattica della matematica, sia da quello della didattica della lingua e dell'educazione linguistica (si pensi ai lavori del GISCEL, a partire dalle *Dieci tesi* e poi dagli studi degli anni '80 fino a oggi), si sono fatti notevoli passi in avanti rispetto alla percezione dell'importanza della lingua nelle e per le discipline, e delle discipline come ambiente ideale per lo sviluppo delle competenze linguistiche. La nostra visione, che va al di là della singola ricerca, accoglie e sviluppa proprio questo modo d'intendere il dialogo interdisciplinare e l'impostazione dell'insegnamento e dell'apprendimento.

1.2 Complessità e ricchezza: la costruzione di una chiave di lettura condivisa

Se è vero, come ha scritto Borges (2005, p. 150), che «ogni linguaggio è un alfabeto di simboli il cui uso presuppone un passato che gl'interlocutori condividono», allora non si può proprio dire che matematici e linguisti abbiano un passato comune, né, quindi, che siano dotati di una prospettiva e di un linguaggio con cui parlarsi da subito senza incomprensioni. Chi idealizza il lavoro interdisciplinare è forse perché non l'ha mai provato davvero, giorno per giorno, nelle asperità di un dialogo non per forza immediato: d'altronde, se da anni vigono separazioni è anche perché ci sono radicati aspetti epistemologici e funzionali delle discipline che le distinguono. Ma per chi non l'ha mai provato è altrettanto, e forse ancor più, difficile vederne la bellezza attraverso la fatica e cogliere la fortuna di poter lavorare quotidianamente in sinergia.

Quando parliamo di lavoro interdisciplinare non intendiamo una lettura che viene da una singola disciplina, richiamando aspetti dell'altra, ma un'effettiva commistione di punti di vista che vengono dai professionisti di entrambe le discipline. Questa commistione non è solo un gioco di equilibrismi tra quadri teorici e sguardi di analisi, ma piuttosto un insieme di vere e proprie azioni di supporto reciproco grazie alle quali una prospettiva sostiene e rinforza l'altra: in questo modo l'approccio interdisciplinare assume caratteristiche proprie, che rappresentano un qualcosa in più della somma dei contributi delle singole discipline.

Quanta strada, però, c'è ancora da fare per realizzare un vero cambiamento di paradigma? Quanto coraggio occorre avere per attraversare, profondamente e con efficaci modalità operative, i confini delle materie scolastiche? E quanto incidono le reali possibilità offerte dai testi e dai contesti? Queste e altre domande sono inevitabili per ricercatori e docenti.

Pensando ai lavori del progetto qui presentato, le due parole *complessità* e *ricchezza* possono offrire una buona sintesi di ciò che è stato costante nelle diverse fasi del lavoro: dalla raccolta al trattamento all'interpretazione dei materiali, sino alla costruzione di quadri teorici via via adeguati per i temi esplorati, spesso già toccati dalle singole discipline, ma solo di rado già esaminati congiuntamente. Se lo sforzo è andato a buon fine è solo perché si è abbracciata con fiducia la convinzione che Maria Luisa Altieri Biagi esplicitava sin dal 1978, e cioè che «l'interazione linguistico-matematica sia una delle più stimolanti, delle più produttive realizzabili» (Altieri Biagi, 1978, p. 142).

In questo quadro vanno collocate le analisi che presenteremo, in cui, come sarà approfondito nei capitoli e nei paragrafi dedicati, si troveranno spesso elaborati e adattati alcuni presupposti e alcuni elementi metodologici di entrambe le discipline: ad esempio, si avranno elementi tipici delle analisi di linguistica testuale e di didattica della matematica uniti ad aspetti che considerano la multimodalità e il legame testo verbale-figure, peculiare e inevitabile nel libro scolastico di geometria; oppure analisi lessicali e lessicometriche che non si limitano a rilievi d'insieme, applicabili a ogni testo, ma che considerano specifici termini e locuzioni matematiche, con le loro particolarità informative. E questi non sono che pochi casi utili a esemplificare che cosa si intende con volontà di offrire una chiave di lettura condivisa e quanto più possibile adeguata all'oggetto d'indagine: "il libro scolastico di matematica".

1.3 Un lungo percorso: dai primi lavori all'idea del progetto *Italmatica*

Il progetto e le sue intenzioni sono il naturale proseguimento di ricerche precedentemente condotte dai membri del gruppo di ricerca. È infatti nata sin dal 2012 (Fornara & Sbaragli, 2013) l'idea di lavorare in modo congiunto, attraverso diverse esperienze di studio, ricerca e formazione (rivolta a futuri docenti e a docenti in servizio)¹, in dialogo costante con gli altri ricercatori o gruppi di ricerca che, nel panorama internazionale, stanno portando avanti ricerche affini. Negli anni, facendo leva anche sulle esperienze dei singoli componenti dell'équipe di ricerca, si sono esplorati vari nodi cruciali: tutto ha preso il via da un'indagine relativa all'importanza delle competenze lessicali nella risoluzione dei problemi matematici (Fornara & Sbaragli, 2014; 2016) e anche in seguito l'attenzione al lessico non è mai mancata (Demartini, Fornara & Sbaragli, 2018), ma a essa si sono affiancati altri filoni d'indagine, che sono andati a interessare sempre più da vicino il testo scolastico (ne è un esempio lo studio delle caratteristiche della sintesi della definizione matematica,

1. L'attenzione concreta alla trasponibilità in didattica dei risultati della ricerca è ben visibile in pubblicazioni come Demartini, Fornara e Sbaragli (2017); Demartini e Sbaragli (2015).

Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020). Nel 2015, il convegno *Questo matrimonio s'ha da fare*, a Locarno, ha suggellato i primi anni di attività, mentre il continuo lavoro sinergico degli anni successivi ha permesso di unire ancora maggiormente le forze sino a ottenere un importante finanziamento per il triennio 2018-2021: il progetto di ricerca *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la ricerca scientifica, per il quale è stato ottenuto un prolungamento di sei mesi fino a febbraio 2022).

In esso si è deciso di concentrarsi sul libro di testo per una pluralità di ragioni. In primis perché, da che mondo è mondo, o, meglio, da che scuola è scuola, il libro di testo è un oggetto centrale nella pratica didattica; per il docente che se ne serve (tanto, poco, in parte, con la massima flessibilità...), ma anche per chi sceglie di non usarlo, perché, percorrendo altre strade, non può comunque fare a meno di sapere che dietro alla sua scelta c'è un dialogo implicito e talvolta critico con la trattatistica e con la manualistica (a proposito dell'uso dei libri, nel progetto *Italmatica* è anche stato somministrato un questionario ai docenti; si vedano Canducci, Demartini, Franchini e Sbaragli, 2020; Sbaragli, Canducci, Demartini e Franchini, 2020). Poi perché il testo è uno degli attori che, nel mondo scolastico, "parla" agli allievi della disciplina e, come vedremo, lo fa in vari modi, alcuni tipici e prevedibili, altri che saltano meno all'occhio a una prima lettura: ciò lo rende un luogo d'incontro interdisciplinare per natura, perché in esso la matematica e il suo linguaggio diventano discorso scientifico secondario rivolto a un particolare tipo di destinatari, con tutte le conseguenze comunicative e pragmatiche che ciò può comportare.

Capirne meglio le caratteristiche e gli eventuali nodi di difficoltà, magari evitabili, si presenta come un terreno d'indagine proficuo sia sul piano descrittivo, sia su quello delle ricadute concrete, soprattutto per quanto concerne le scelte degli insegnanti e gli interrogativi rispetto alle possibili difficoltà di comprensione di bambini e ragazzi. Ciò accogliendo e attualizzando la prospettiva di Calò e Ferreri (1997, p. 3), secondo cui il testo scolastico è una «cartina di tornasole» che apre interrogativi sui contenuti, sulle prassi didattiche e sulle abitudini linguistiche in uso a scuola quando si trattano le discipline. Il tutto nell'ottica di una profonda sinergia, utile a esaminare con sguardo almeno in parte nuovo la questione della natura, del ruolo e delle possibilità del testo di matematica per la scuola.

2.1 Tratti peculiari della lingua della matematica

La matematica ha sviluppato nel tempo un *linguaggio specialistico* (o *settoriale*), anche detto *lingua speciale*¹, caratterizzato da precisione, sinteticità ed efficacia. Tale linguaggio – che appartiene al grande gruppo delle lingue delle scienze – presenta elementi appartenenti a diversi codici semiologici, e si realizza, secondo varie convenzioni, in testi scritti in cui convivono parole della lingua comune e termini tecnici, ma anche figure, grafici ed espressioni simboliche (equazioni, formule, espressioni algebriche ecc.).

Il linguaggio specialistico della matematica, come quelli di altre discipline, è caratterizzato da una forte *lessicalizzazione* derivante dall'esigenza di definire con precisione i termini specifici (*lessemi*), cioè di dotare la disciplina stessa di una terminologia quanto più possibile referenziale e monosemica (Cortelazzo, 1994a, 2011; Gotti, 2008; Gualdo & Telve, 2011; Lavinio, 2004); questi termini possono poi essere utilizzati all'interno del linguaggio stesso dandone per assodati i significati. A questa caratteristica se ne aggiunge un'altra assai ricorrente nei linguaggi scientifici, cioè la *nominalizzazione*, che consiste nella sostituzione con sostantivi di forme appartenenti ad altre categorie, soprattutto verbi che individuano azioni o processi². Un esempio di nominalizzazione è il passaggio dalla frase «Moltiplico 4 per 5, aggiungo 8 e trovo 28» alla frase semanticamente equivalente «La somma del prodotto di 4 per 5 con 8 è 28», in cui alle forme verbali "moltiplico" e "aggiungo" vengono preferiti i nomi attribuiti ai risultati di tali operazioni, cioè "prodotto" e "somma", aumentando così la presenza di sostantivi specialistici.

1. Il linguaggio delle scienze esatte e naturali (matematica, fisica, biologia ecc.) è una delle grandi categorie di linguaggi settoriali; oltre a esso ci sono i linguaggi delle attività produttive (come l'agricoltura), dei servizi (come i trasporti), e delle scienze umane e sociali (Rovere, 2010).

2. In linguistica, le nominalizzazioni in senso stretto designano un particolare tipo di trasformazione di verbi (soprattutto) o, più raramente, di aggettivi in sostantivi; tale trasformazione rientra nei meccanismi di derivazione. Per quanto riguarda i verbi, la nominalizzazione si realizza in particolare con l'aggiunta di suffissi quali -mento, -zione, -sione, -tura (ruotare > rotazione; comprendere > comprensione ecc.). Le nominalizzazioni rientrano nelle variazioni dell'espressione dei significati che Halliday (1994; 2004a) chiama «metafore grammaticali»: con questa espressione intende la sostituzione della classe grammaticale in cui un concetto rientra in maniera più naturale con un'altra classe grammaticale. In ambito matematico, nel nostro caso specificamente geometrico, è possibile rilevare una preferenza per le forme nominali (sintetiche) in luogo di quelle verbali: si va da casi in cui il fenomeno riguarda parole specialistiche, ma non in senso stretto (tecnicismi secondari come p. es. "classificazione" dei poligoni in luogo di "classificare" i poligoni, e, analogamente, "scomposizione", "approssimazione" ecc.), fino a espressioni come "congruenza delle figure piane", in cui si ha un unico sostantivo (il termine "congruenza") al posto di "sovrapporre figure piane in modo che coincidano punto per punto" (processo complesso che coinvolge diversi sub-processi).

Le caratteristiche di lessicalizzazione e nominalizzazione si intensificano con il progredire dei livelli scolastici e portano a testi particolarmente condensati e a un'accentuata *densità lessicale* derivante dall'uso frequente di termini, espressioni e frasi sintetiche nelle quali vengono fornite numerose informazioni in poche battute (D'Amore, 2000; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020; Demartini & Sbaragli, 2019a; Laborde, 1995; Sbaragli, 2020)³. Si pensi ad esempio all'espressione «gli angoli formati da lati consecutivi contenenti punti del piano interni al poligono», scelta da alcuni testi per definire gli *angoli interni*. La comprensione di questo lungo sintagma richiede senz'altro conoscenze a livello lessicale per la presenza di tecnicismi (peraltro tutti "parole-termini"⁴, cioè parole polisemiche dotate di più significati oltre a quello tecnico-specialistico matematico: *angoli, lati consecutivi, punti, piano, poligono*), e una buona capacità di gestire le forme nominali del verbo (*formati, contenenti*), che deagentivizzano il discorso; ma non solo: anche la struttura interna è impegnativa da sciogliere e da interpretare, in quanto caratterizzata da fenomeni di ricorsività di sintagmi così rappresentabili (utilizzando una notazione con parentesi, volta semplicemente a far cogliere la complessità di quello che, nell'insieme, è un sintagma nominale, la cui testa è *angoli*):

gli angoli [formati [da lati consecutivi [contenenti punti [del piano [interni (al poligono)]]]]]

Ne consegue un discorso particolarmente condensato, che in poche parole esprime molto. Per riuscire a gestire questo tipo di espressioni, occorre possedere competenze sia matematiche sia linguistiche: infatti, la comprensione piena è possibile solo per chi conosce il significato matematico dei tecnicismi (si pensi, oltre ai sostantivi già citati, alla pregnanza semantica di aggettivi come *consecutivi* e *interni*) e riesce a orientarsi dal punto di vista sintattico all'interno di simili costrutti. Tali formulazioni possono complicare il processo di lettura anche demotivando lo studente, che – privo di strumenti e di strategie adeguate – si allontana così ulteriormente dalla possibilità di comprendere. Anche gli apparenti dettagli possono

3. In genere, in linguistica computazionale si parla di densità lessicale per indicare il rapporto fra parole lessicali (piene, portatrici di significato) e numero totale di parole in un testo. Nella lingua della matematica a ciò si accompagna un'alta densità informativa e semantica dei termini tipici dei linguaggi specialistici, definiti da un alto numero di tratti semantici (diversamente dalle parole dal significato generico, definite da un basso numero di tratti di significato).

4. Nei linguaggi delle scienze coesistono parole comuni, tecnicismi primari (che possono essere termini univoci e monosemici, come *cateto* o *ipotenusa*, o parole-termini come *angolo* o *contorno*, che nella lingua del quotidiano presentano altre accezioni oltre a quella tecnico-specialistica; sulla percezione di questo tipo di parole in contesto scolastico si veda Demartini, Fornara & Sbaragli, 2018) e tecnicismi secondari; la distinzione fra parole e termini si può trovare illustrata in studi come Ferreri (2005) e Lavinio (2004).

essere critici per un apprendente: ad esempio, un lettore frettoloso, distratto o non sufficientemente esperto di come stanno le cose in geometria, potrebbe erroneamente riferire *contenenti a lati consecutivi* (l'accordo di genere e numero c'è, e l'elemento più prossimo è quello con cui viene spontaneo effettuare il collegamento, in mancanza di altri fattori discriminanti).

Dall'esempio prima mostrato emerge come tra gli aspetti strettamente linguistici del linguaggio matematico rientrano anche le caratteristiche di *deagentivizzazione* e *atemporalizzazione*, che lo rendono di ancor più difficile comprensione da parte degli allievi. Come sintetizzato da Cortelazzo (2011), «la deagentivizzazione consiste nel fatto che il testo scientifico è incentrato sugli oggetti, sugli eventi, sui processi [...] e non sull'agente»; la lingua dispone di vari strumenti per orientare il discorso in questo modo: il ricorso a forme passive e impersonali (come ***sono detti congruenti, l'area del triangolo si ottiene...***, ***un triangolo equilatero si può considerare isoscele...***); la preferenza per le forme nominali (o indefinite) del verbo, cioè gerundi, infiniti, participi (*considerando, avendo per, contenenti* ecc.); le già citate nominalizzazioni. Dunque, per comprendere a fondo enunciazioni come quella riportata nell'esempio che definisce gli angoli interni di un poligono, occorrono competenze linguistiche e conoscenze matematiche che permettano di gestire la concatenazione e la «densità informativa» (Gualdo & Telve, 2011, p. 244) del discorso scientifico, perché, come scrive Halliday (2004a, pp. 125-126, traduzione degli autori), «il discorso scientifico è tipicamente strutturato come una sequenza di passi collegati, in maniera tale che, in qualsiasi momento, un'intera batteria di passi precedenti può essere mobilitata come base per il passo successivo».

Simili aspetti peculiari del discorso matematico assumono particolari specificità nella trasposizione all'interno del testo per la scuola. Ad esempio, va segnalato che il linguaggio matematico assume da questo punto di vista tratti misti soprattutto per i primi livelli scolastici, tendendo ad accostare agli elementi specialistici del linguaggio della matematica toni più colloquiali (come, ad esempio, il ricorso al "noi" inclusivo: *consideriamo, osserviamo, se ipotizziamo...* o l'uso di espressioni legate al movimento, che si collegano alla rappresentazione degli oggetti geometrici, come *partono, si incontrano, escono...*). L'uso di queste metafore basate sul movimento è suggerito dallo stesso Hilbert nella prima pagina dei *Grundlagen* (Hilbert, 2009); rientrano dunque a pieno titolo nel linguaggio della matematica.

In conclusione, se si considera che la lettura e la comprensione di un testo sono processi che richiedono e chiamano in causa molti e diversi elementi (atteggiamenti, conoscenze pregresse, attivazione inferenziale ecc.), allora occorre riflettere su come un testo con le caratteristiche linguistiche sopra descritte possa agire, a livello di motivazione e di metacognizione, sull'allievo non pronto a gestirlo. Un lettore che si trova disarmato di fronte a un testo, cioè privo di strategie per una lettura efficace, sarà un lettore con bassa motivazione in partenza e, succes-

sivamente, un lettore non in grado di esercitare un controllo e una verifica della propria comprensione, in quanto privo degli strumenti minimi per gestire il tipo di lingua con cui è confrontato. Tale lettore si troverà anche in difficoltà nel momento in cui dovrà produrre testi verbali, scrivere o trasformare espressioni numeriche o simboliche, disegnare o trasformare figure geometriche. Insomma, perché l'italiano delle discipline sia davvero una lingua «per capire e per studiare» (Colombo & Pallotti, 2014) è fondamentale osservarne le caratteristiche nei libri di testo per la scuola, nella prospettiva di ripensare un'educazione linguistica profondamente interdisciplinare. Recuperando la prospettiva inaugurata in Calò e Ferreri (1997, p. 4), possiamo considerare, quindi,

il libro di testo [...] come pretesto e punto di partenza per risignificare l'educazione linguistica, la sua trasversalità verticale ed orizzontale nel curricolo scolastico [...];
il libro di testo come cartina di tornasole che permette di evidenziare presenza e assenza, qualità e quantità di contenuti, approcci metodologici, tecniche che si considerano funzionali all'educazione linguistica e che intervengono nel processo quotidiano dell'insegnare e dell'apprendere.

Per fare ciò, la ricerca deve abbracciare una prospettiva ampia, che miri a costruire un dialogo innovativo e attuale fra disciplina (la matematica), codice che la veicola (il suo linguaggio, con le sue peculiarità e con la sua storia) e attori coinvolti nell'insegnamento/apprendimento.

2.2 Cenni storici sull'evoluzione del linguaggio della matematica: il ruolo delle notazioni e dei simbolismi

Con il progredire dei livelli scolastici il linguaggio matematico (e di conseguenza i libri che veicolano la materia) si arricchisce oltre che di termini linguistici anche di notazioni e simbolismi specifici, che si sono sviluppati lungo la storia della disciplina, diventando con il tempo sempre più sintetici, efficaci, generali e universali. Come presentato in D'Amore e Sbaragli (2018; 2019), risale al grande matematico Diofanto di Alessandria (III-IV sec.) l'idea, prodigiosamente ricca di sviluppi futuri, di usare dei simboli presi a prestito dall'alfabeto greco al posto delle assai scomode espressioni linguistiche con cui gli studiosi avevano sempre indicato gli enti di cui si occupavano; Diofanto ebbe così un ruolo primario nello sviluppo della notazione algebrica. A noi moderni viene ormai spontaneo attribuire un determinato simbolo all'incognita di un problema; se, per esempio, cerchiamo "un numero tale che il successivo del suo triplo sia uguale a 100", ci viene naturale scrivere: $3x + 1 = 100$, e risolvere l'equazione tenendo sempre "in evidenza" l'incognita x , ossia $3x = 99$ e quindi trovare la risposta $x = 33$. Ma a quei tempi l'unica forma conosciuta per espri-

mere questo problema era proprio quella che abbiamo messo tra virgolette: non esisteva un segno “x” che indicasse “ciò che stiamo cercando”, non esisteva il segno “+” per indicare l’operazione di addizionare tra grandezze note o incognite ecc.

L’operare sintatticamente sulle notazioni delle grandezze in gioco non è un banale risparmio di “spazio” di scrittura, ma rappresenta un vero e proprio algoritmo, ossia un metodo che semplifica ed “esegue” i ragionamenti, ricorrendo al simbolo e non al significato. Allo stesso modo procede un cervello elettronico, che, una volta programmato, esegue particolari “ragionamenti” o meglio passaggi che qualcuno ha fatto una volta per tutte in generale. Tale notazione sintattica allontana dunque dal contesto specifico che si sta trattando. Una volta impostata l’equazione risolvibile di un problema, si può benissimo dimenticare completamente la situazione semantica proposta e mettere in azione la “macchina” sintattica: essa “ragionerà” sul problema, in modo meccanico o sintattico, fin tanto che non avrà fornito il risultato finale. Sta poi al risolutore tornare al contesto reale del problema affrontato, passando così dal mondo matematico a quello reale: fase che risulta fondamentale nel *ciclo di matematizzazione* di risoluzione dei problemi e che spesso purtroppo non viene gestita bene da parte degli studenti (Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2017; Jupri & Drijvers, 2016). Va considerato che sarebbe molto difficile, se non talvolta impossibile, interpretare nella realtà dei fatti le varie “fasi” del funzionamento dell’algoritmo mentale; tuttavia esse sono giustificate dalle regole con cui i simboli si connettono.

Diofanto di Alessandria anticipò così di quasi un millennio il fondamentale passaggio dall’*algebra retorica* (nella quale cioè tutti i procedimenti algebrici e tutti i termini vengono espressi mediante l’uso di parole), avvenuto dal III millennio a. C. al XIV-XV secolo, all’*algebra sincopata* (nella quale alcuni termini e alcuni procedimenti vengono sistematicamente indicati mediante abbreviazioni di parole). I primi tentativi a opera di Diofanto non hanno avuto seguito, per poi arrivare a significativi passi avanti tra il XV e il XVI secolo, mentre una terza fase di sviluppo, l’*algebra simbolica*⁵, si svilupperà poi nel XVI e XVII secolo, grazie soprattutto all’opera dei francesi François Viète (1540-1603) e René Descartes (Cartesio) (1596-1650)⁶.

È insomma fra il XV e il XVII secolo che successe un fatto nuovo e decisivo per la matematica: la nascita di un simbolismo moderno, significativo, agile, semplice, duttile, formidabile, sostanzialmente quello che determinò la grande evoluzione del

5. Riteniamo significativa l’etimologia del termine “simbolo”, che deriva dal greco σύμβολον (sým-bolon, segno) derivato dall’unione di σῦμ- (sym-, insieme) e βάλλω (bállō, getto, lancio, metto), cioè “mettere insieme”, dunque riunire in un tutto unico; il suo contrario è διαβάλλω (diabállō), composto da δια- (dia, attraverso) e dalla stessa radice βάλλω (bállō, getto, lancio, metto): si ottiene dunque “diavolo”, colui che divide. È significativo pensare che il diavolo sia l’opposto del simbolico.

6. Questa scansione è stata proposta dallo storico della matematica e filologo tedesco Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann verso la metà del XIX secolo (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992; Nesselmann, 1842; Serfati, 1997).

pensiero matematico e i risultati incredibili di oggi. Fatto assai significativo: il simbolismo fu adottato in tutto il mondo in tempi relativamente brevi, determinando così la possibilità di comunicare fra matematici di lingue e culture diverse. Si è così giunti a un linguaggio che consente di dedurre formalmente e non solo di descrivere, come si fa nel linguaggio naturale, di effettuare trasformazioni semiotiche di trattamento (da una rappresentazione all'altra all'interno di uno stesso registro⁷ semiotico, ad esempio rimanendo all'interno dell'algebra) e di conversione (da una rappresentazione in un certo registro semiotico a un'altra in un altro registro semiotico, come accade per esempio, nel passaggio dalle rappresentazioni algebriche a quelle figurali nella geometria analitica), senza bisogno di giustificare passo passo la loro semantica algebrica o la loro interpretazione geometrica (D'Amore, Fandiño Pinilla & Iori, 2013)⁸.

Dal punto di vista didattico va però considerato che l'uso di notazioni e simboli speciali rende il linguaggio matematico, soprattutto a partire dalla scuola secondaria di primo grado, sempre più distante dall'uso familiare della lingua naturale e tale da contenere informazioni sempre più concise e distanti dal contesto reale. Apprendere la matematica significa, dunque, contestualmente, imparare un nuovo codice comunicativo (cioè imparare la "sua lingua"). Per fare un esempio, già nella scrittura del numero 3 espresso in forma indo-arabo non si coglie la semantica in gioco, ossia di quale tipo di elementi di cardinalità 3 si sta parlando. Inoltre, ad esempio, la scrittura « $5 + 3 = 8$ » potrebbe risultare più complessa da decodificare rispetto alla corrispondente descrizione verbale «Se a 5 aggiungi 3 ottieni 8» da chi non ne padroneggia il significato simbolico; viceversa potrebbe essere percepita come più sintetica e immediata da parte di chi ne afferra il senso, cioè sa collegarla con altre espressioni analoghe, con proprietà note o procedimenti già esperiti. Da ciò deriva che solitamente vi è un diffuso uso di notazioni alternate alla lingua naturale, allo scopo di bilanciare l'efficacia della comunicazione. Tale alternanza di rappresentazioni rende il linguaggio matematico particolarmente complesso da gestire da parte degli studenti, soprattutto alla scuola secondaria. Il libro di testo è il luogo per eccellenza della coesistenza di rappresentazioni (in un crescendo del ruolo del simbolismo al progredire della scolarità) e di stili comunicativi diversi, in cui spesso il lettore si trova a dover gestire informazioni e costruzioni concettuali veicolate tramite una pluralità di registri e di modalità.

7. Qui e in seguito useremo per lo più il termine "registro" in riferimento alle diverse possibilità di rappresentazione semiotica (p. es. registro verbale, algebrico, figurale ecc.), scelta derivante prevalentemente dagli studi di Duval (**par. 2.4**); potremo, però, in altri luoghi del volume, anche riferirci a "registro" secondo il significato, comune in linguistica, di variazione d'uso della lingua e dello stile a seconda di vari parametri (la situazione, gli interlocutori coinvolti, le scelte autoriali ecc.).

8. Per un approfondimento di questi aspetti storici del linguaggio della matematica si vedano i testi di D'Amore e Sbaragli (2017; 2018; 2019; 2020).

Questa pluralità di stimoli si giustifica didatticamente se si considera che il discorso matematico è astratto e non direttamente percettibile tramite i sensi: il testo scolastico è uno strumento che ha il fine di provare a rendere l'astrattezza tipica della matematica più vicina e comprensibile al destinatario, almeno in prima battuta, senza tuttavia, al contempo, perdere il suo ruolo di veicolo del sapere disciplinare in quanto tale.

Come accennato, il passaggio da un'algebra retorica, all'algebra sincopata fino a quella simbolica ha consentito di rendere il linguaggio della matematica un *linguaggio universale*, trasferibile da una lingua all'altra, cioè un linguaggio attraverso cui «chiunque abbia una certa comprensione matematica è in grado di risolvere problemi matematici indipendentemente dalla lingua che parla» (Adoniou & Qing, 2014, p. 3, traduzione degli autori). L'universalità del linguaggio matematico è stata nei secoli ampiamente dibattuta in ambito storico, filosofico, logico e, nel secondo '900, anche nelle riflessioni epistemologiche in seno alla didattica della matematica. Alcuni autori (Merchant, 1999; Perkins & Flores, 2002; Waller & Flood, 2016) notano ad esempio come il fatto che la matematica sia composta da un linguaggio trasferibile da una lingua all'altra consenta di creare intersezioni significative fra persone appartenenti a gruppi linguistici e culturali differenti. Altri autori (Barrow, 2014; Cavanagh, 2005; D'Ambrosio, 1985; 2007) sottolineano invece la rilevanza che hanno i fattori culturali specifici di una popolazione anche nella creazione di simbolismi con i quali fare matematica, rilevanza che sembra sostenere la posizione di una non universalità intrinseca del linguaggio matematico.

In simili posizioni sembra riecheggiare il classico e ancor più vasto dibattito tra universalisti e relativisti in campo linguistico, cioè tra coloro i quali sostengono che il linguaggio, pur con differenze di superficie, ha radici universali in quanto biologicamente determinato, e i processi cognitivi sottesi sono gli stessi per tutti gli esseri umani (come insegna la lezione di Noam Chomsky), e coloro per i quali, invece, la lingua influenza il pensiero e dunque lingue diverse inducono diverse concezioni della realtà e diversi modi di viverla; comunemente questa posizione, già esplorata nel corso dell'Ottocento, nel Novecento risulta nota come "ipotesi di Sapir-Whorf" (in riferimento agli studiosi che la elaborarono), ed è stata variamente ripresa, contestata e rielaborata. Il discorso è insomma complesso e articolato, ed esula dagli scopi di questo volume; in questa sede è sufficiente ammettere che il linguaggio matematico nel corso dei secoli si è sviluppato in simbolismi e sub-codici specialistici tendenzialmente condivisi (Laborde, 1995).

2.3 La natura della matematica come componente che influenza il suo linguaggio

Le caratteristiche del linguaggio della matematica sono strettamente intrecciate con la natura dei suoi oggetti: un tema che è stato ed è tuttora dibattuto in ambito

filosofico, storico, epistemologico e, in tempi più recenti, anche nell'ambito della didattica della matematica (D'Amore, Fandiño Pinilla & Sbaragli, 2017; Ernest, 1991; Godino & Batanero, 1998; Thompson & Sfard, 1994).

Senza entrare nel dettaglio, basterà ricordare come presentato in D'Amore, Fandiño Pinilla e Sbaragli (2017) che esistono principalmente due correnti alle quali si possono ricondurre le varie accezioni: la corrente *realista* (o figurativa), che vede nell'oggetto matematico qualcosa che esiste indipendentemente dall'uomo e dalla sua attività, e quella *pragmatista*, nella quale l'azione culturale dell'uomo è predominante nel definire usi, segni e pratiche. Tale distinzione era già apparsa in Kutschera (1979).

Nella prima teoria il significato dell'oggetto matematico è «una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongono un realismo concettuale» (Godino & Batanero, 1994, p. 329, traduzione degli autori). Come già asseriva Kutschera (1979, p. 29, traduzione degli autori), «Secondo questa concezione il significato di un'espressione linguistica non dipende dal suo uso in situazioni concrete, bensì avviene che l'uso si regga sul significato, essendo possibile una divisione netta fra semantica e pragmatica».

Se si vanno ad applicare i presupposti ontologici della semantica realista alla matematica, si trae necessariamente una visione platonica degli oggetti matematici: in essa nozioni, strutture ecc. hanno una reale esistenza, che non dipende dall'essere umano, in quanto appartengono a un dominio ideale; "conoscere", da un punto di vista matematico, significa "scoprire" gli enti e loro relazioni in tale dominio. Ed è pure ovvio che tale visione comporta un assolutismo della conoscenza matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non modificabili dall'esperienza umana, dato che sono a essa precedenti, a essa estranee e da essa indipendenti. Posizioni di questo tipo, seppure con diverse sfumature, furono sostenute da Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel ecc; ma trovarono anche violente critiche (il *convenzionalismo* di Wittgenstein e il *quasi empiricismo* di Lakatos: si vedano Ernest (1991) e Speranza (1997)).

Nelle *teorie pragmatiste*, come fa capire l'etimologia stessa (πραγματικός, "che riguarda i fatti", da πρᾶγμα, -ατο), le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazione scientifica oggettiva in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può far altro che esaminarne i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti. Ernest (1991, p. XI, traduzione degli autori), per esempio, afferma che, nonostante ciò che si crede da due millenni, la matematica non è un insieme di verità oggettive, ma «è fallibile, mutevole, e come qualsiasi altro corpo di conoscenza, il prodotto dell'inventiva umana».

Anche Balacheff (2008) è su questa linea di pensiero e si concentra sulla natura non fisica degli oggetti matematici, sostenendo come questa sia la ragione dell'importanza, nelle pratiche matematiche, del linguaggio naturale, che diventa dunque un veicolo fondamentale per trattare la matematica. La visione pragmatista si colloca nel più ampio quadro degli studi di pragmatica che, nel Novecento, si sono sviluppati in varie direzioni partendo dalle posizioni del Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*, per cui una parola assume significato solo in un "gioco linguistico", cioè può essere solo contestualmente significativa (Wittgenstein, 1967; 1976)⁹. Ciò che vale per il linguaggio ordinario è dunque esteso al linguaggio matematico: gli oggetti matematici diventano dunque simboli che emergono da un sistema di usi caratterizzanti le pragmatiche umane (o, almeno, gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. In questa prospettiva, un *oggetto matematico* è

un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli eccetera), vale a dire, registro della scrittura.

(Chevallard, 1991, p. 110, traduzione degli autori)

Essendo il "praxema" un oggetto materiale legato alla prassi, l'oggetto è allora un «emergente da un sistema di praxema» (Chevallard, 1991, p. 110). In questa visione, l'espressione linguistica nella sua forma orale e scritta assume un ruolo chiave nella costruzione dei concetti (e degli stessi oggetti) matematici, perché offre strumenti fondamentali di mediazione e di rappresentazione di ciò che non si può percepire con i sensi.

È ovvio che le teorie realiste e pragmatiste non sono del tutto complementari e nettamente separate l'una dall'altra, ma oggi le teorie pragmatiste sono maggiormente considerate, soprattutto in chiave didattica. Ciò anche perché, indipendentemente dalle varie concezioni filosofiche, una cosa è certa: «[...] gli oggetti della matematica non sono direttamente accessibili tramite la percezione, o tramite un'esperienza intuitiva immediata, come lo sono gli oggetti comunemente detti "reali" o "fisici"» (Duval, 1993, p. 38, traduzione degli autori); al contrario di altre scienze, nelle quali l'oggetto di conoscenza può essere manipolato più o meno concretamente in modo diretto, gli oggetti della matematica sono ideali e astratti

⁹ La pragmatica (Bazzanella, 1994; Bianchi, 2009; Levinson, 1983; Sbisà, 2009) si è poi rapidamente sviluppata nell'ambito degli studi linguistici a partire dagli anni Sessanta in particolare grazie a filosofi del linguaggio come John L. Austin, John R. Searle e Paul Grice.

In riferimento specifico alla geometria, Speranza (1997, p. 18) afferma che

le figure, le immagini mentali, sono gli individui di cui si occupa la Geometria: essa parla però di specie, di classi notevoli di figure. Si tratta di un tipico procedimento di astrazione: raggruppiamo le figure che hanno certe caratteristiche comuni in classi, a ciascuna delle quali corrisponde un concetto collettivo ed eventualmente anche un nome comune (cerchio, triangolo, prisma, ...) o un'espressione linguistica che ha la funzione di nome comune (triangolo equilatero, coppie di circonferenze concentriche, ...).

Nella realtà delle nostre comuni percezioni sensoriali non esistono ad esempio punti, angoli, triangoli, numeri concepiti in senso matematico, né tantomeno enti geometrici illimitati come le rette; non sono quindi possibili rinvii di tipo ostensivo, poiché, «[...] a differenza dell'oggetto materiale, [...] i costrutti matematici avanzati sono totalmente inaccessibili ai nostri sensi – possono essere visti solo con gli occhi della nostra mente» (Sfard, 1991, p. 3, traduzione degli autori).

In matematica, dunque, il noto triangolo semiotico della significazione¹⁰ (qui in **Fig. 1** e **Fig. 2**), che rappresenta il significato nel suo insieme di relazioni cooperanti fra oggetto (referente), significante e concetto (significato), nel polo del referente è costituito da un tipo di oggetti particolari, raggiungibili tramite un processo di astrazione. Ciò che è concreto sono gli oggetti materiali percepibili e manipolabili (i *praxemi* prima citati, che potremmo anche chiamare *significanti*), che permettono la costruzione concettuale. Pertanto, la costruzione dei significati matematici è fortemente legata al rapporto che si instaura con l'oggetto del sapere (cioè con il referente) tramite le sue rappresentazioni percepibili, che possono essere molto diverse da individuo a individuo, e dalle varie occasioni di esperienza e di apprendimento.

¹⁰. Idea molto antica, che ha fra i suoi principali e più noti sviluppatori il filosofo statunitense Charles Pierce; come ha illustrato Eco (1973), nel corso della storia del pensiero la terminologia relativa ai diversi elementi è stata numerosa e varia (per ciascuno è stata attribuita, da studiosi diversi, circa una decina di nomi diversi). In campo linguistico, è stato in particolare il fondamentale *Cours* di Ferdinand De Saussure (2009) ad avviare la riflessione in questo senso, dotando la linguistica generale di fondamenta scientifiche riconoscibili e attuando distinzioni fondamentali, come quella tra *langue* (l'aspetto collettivo, sociale, condiviso e stabile del linguaggio) e *parole* (l'uso che ciascuno ne fa, l'atto individuale).

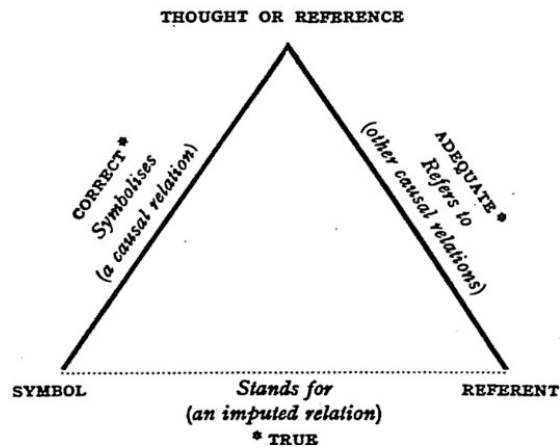


Fig. 1 – Il triangolo semiotico nella versione originaria degli ideatori Ogden e Richards (1989, p. 11).

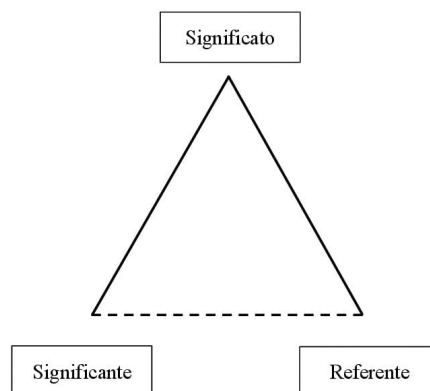


Fig. 2 – Il triangolo semiotico in versione semplificata e con la terminologia di Ferdinand De Saussure (2009).

La linea tratteggiata tra significante e referente fa capire che, diversamente dalle altre due, questa relazione non è causale, ma arbitraria, convenzionale, frutto di accordo.

Alla luce di una più chiara definizione semiotica della costruzione del significato, e in particolare di quello matematico, il poter parlare di matematica (anche) in termini linguistici non solo conferma la «plurifunzionalità» del linguaggio umano (così la chiamano Berruto & Cerruti, 2017), cioè il suo poter parlare di tutto tramite un sistema di segni astratti e ricombinabili, ma anche il valore strumentale della lingua da una parte come mezzo di comunicazione, dall'altra come appiglio per la costruzione stessa del sapere. Infatti, essa coopera a conferirgli forma rappresen-

tabile e comunicabile, rendendolo, quindi, umanamente comprensibile, insieme ad altri codici composti da segni di natura diversa, come ad esempio quello figurale.

Da queste constatazioni sorge una domanda cruciale nella ricerca in didattica della matematica e nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica: come si realizza la conoscenza matematica se non è possibile un accesso diretto ai suoi elementi?

2.4 L'approccio semio-cognitivo di Raymond Duval

In risposta alla domanda posta alla fine del precedente paragrafo, presentiamo i punti salienti dell'approccio semio-cognitivo proposto da Duval (fra gli altri si vedano D'Amore, Fandiño Pinilla & Iori, 2013; Duval, 2017; Iori, 2015). Nell'articolo considerato il riferimento principale di questo approccio, Duval (1993) adotta l'espressione "rappresentazione semiotica" per definire delle «produzioni costituite dall'utilizzo di segni appartenenti a un sistema di rappresentazioni che ha i suoi propri vincoli di significato e di funzionamento» (Duval, 1993, p. 39, traduzione degli autori); tali rappresentazioni sono distinte dall'oggetto matematico a cui fanno riferimento ma risultano necessarie sia ai fini della comunicazione sia ai fini dell'attività cognitiva del pensiero (Duval, 1993, p. 39). Dunque, partendo dal presupposto che ogni oggetto matematico risulta inaccessibile ai sensi, l'unico modo per entrare in relazione con esso è attraverso una sua rappresentazione espressa in un qualche sistema semiotico. Detto in altri termini: si è *costretti* a fare i conti con rappresentazioni realizzate per mezzo di segni, ossia con la semiotica. Stiamo quindi affermando, in linea con il pensiero di Duval (1993), che in matematica *non c'è noetica* (acquisizione concettuale di un oggetto) *senza semiotica* (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) e che la semiotica viene assunta come caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica: «In matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche» (D'Amore, 2001, p. 161).

Queste considerazioni riguardo alla natura degli oggetti della matematica e alla loro accessibilità attraverso rappresentazioni semiotiche hanno importanti ripercussioni in termini di apprendimento. Se è infatti vero che «[...] da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici» (Duval, 1993, p. 38, traduzione degli autori), allora il processo di apprendimento della matematica porta inevitabilmente ad affrontare un *paradosso cognitivo* (Duval, 1993): come può un allievo non confondere l'oggetto matematico con una sua rappresentazione, se l'unico modo per accedervi è appunto attraverso rappresentazioni semiotiche? E, d'altra parte, come si può essere in grado di manipolare oggetti matematici (manipola-

zione che è possibile solo attraverso rappresentazioni semiotiche) senza essersi già appropriati del concetto matematico? A queste domande Duval cerca di rispondere indagando le caratteristiche semiotiche e cognitive della matematica e dell'attività matematica.

Le rappresentazioni semiotiche vengono prodotte all'interno di *sistemi semiotici*, definiti da Duval (2006a) e ripresi in D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013) come insiemi di

- a) regole organizzatrici per combinare o raggruppare elementi (segni) in unità significative (espressioni, unità figurali elementari);
- b) elementi che assumono valore di senso solo in opposizione di scelta ad altri elementi e al loro uso secondo le regole organizzatrici che permettono di designare oggetti (per esempio, le cifre di una base di un sistema di numerazione).

(D'Amore, Fandiño Pinilla & Iori, 2013, p. 31)

Ma non tutti i sistemi semiotici sono per Duval registri di rappresentazione semiotica. Perché ciò avvenga, infatti, il sistema semiotico deve permettere tre attività cognitive fondamentali:

1. la formazione di una rappresentazione identificabile come rappresentazione in un registro dato: enunciazione di una frase, disegno di una figura geometrica, scrittura di una formula ecc. Questa formazione «deve rispettare delle regole (grammatica per le lingue naturali, regole di formazioni in un sistema formale, limiti di costruzione per le figure). La funzione di queste regole è di assicurare, in primo luogo, le condizioni di identificazione e di riconoscimento della rappresentazione e, in secondo luogo, di un loro utilizzo per dei trattamenti»;
2. il trattamento, ovvero la trasformazione della rappresentazione nello stesso registro nel quale è stata prodotta: la parafrasi nella lingua naturale, il calcolo nella scrittura simbolica, la manipolazione di immagini nel registro figurale;
3. la conversione, ovvero la trasformazione della rappresentazione in una rappresentazione in un altro registro semiotico, in modo da «conservare la totalità o solamente una parte del contenuto della rappresentazione iniziale».

(Duval, 1993, p. 42, traduzione degli autori)

Cercheremo ora di chiarire queste tre attività cognitive, riprendendo e sintetizzando un ormai famoso esempio tratto da D'Amore (2001). Consideriamo il concetto di *metà*. Esso può essere rappresentato nel sistema di segni alfabetici della lingua comune attraverso l'uso di espressioni quali "un mezzo", "la metà" e così via. Nella lingua aritmetica si può rappresentare lo stesso concetto in altri modi: attra-

verso la scrittura frazionaria (tramite infinite frazioni equivalenti $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots$), decimale (0,5), esponenziale ($5 \cdot 10^{-1}$) e così via. Nel linguaggio figurale (meglio sarebbe dire pittografico), il concetto di metà può poi essere rappresentato pressoché in infiniti modi; se ne mostrano tre esempi (**Fig. 3**), nei quali il concetto di metà è rappresentato in termini di rapporto fra l'area di una delle due parti di piano in cui è stata divisa ciascuna delle tre figure geometriche rispetto all'intero:



Fig. 3 – Alcune rappresentazioni figurali del concetto di metà.

La prima attività cognitiva (*la formazione di una rappresentazione identificabile come rappresentazione in un registro dato*) è soddisfatta, in quanto ciascuno degli esempi sopra riportati identifica e permette di riconoscere una rappresentazione semiotica del concetto di metà. Rimanendo poi all'interno di uno dei tre sistemi semiotici, ad esempio quello pittorico-figurale, è possibile operare un trattamento da una rappresentazione ad un'altra, manipolando mentalmente o materialmente le figure geometriche date. È così possibile identificare la seconda attività cognitiva (*il trattamento*) all'interno di tale registro semiotico. Infine, è possibile trasformare ogni rappresentazione data in partenza (ad esempio la scrittura decimale 0,5) in un'altra rappresentazione afferente a un diverso sistema semiotico di arrivo (ad esempio l'espressione "metà"): è cioè possibile effettuare la *conversione* semiotica da un sistema a un altro. La conclusione che ne deriva è che ognuno dei sistemi semiotici presi in esame è, nell'ottica di Duval, un registro di rappresentazione semiotica.

Dagli esempi mostrati emerge come i registri semiotici possano presentare differenze sostanziali tra loro. A tal proposito Duval (2006a; 2006b; 2017) individua quattro tipi di registri semiotici:

Registri discorsivi

- **multifunzionali**

esempio: lingue naturali scritte o parlate;

- **monofunzionali**

esempio: scritture simboliche (sistemi di numerazione, scrittura algebrica, scrittura simbolica geometrica, linguaggi formali ecc.);

Registri non discorsivi

- **multifunzionali**

esempi: di tipo iconico (immagini, con produzioni a mano libera con conservazione interna delle relazioni topologiche caratteristiche delle parti dell'oggetto) o non-iconico (figure geometriche);

- **monofunzionali**

esempi: grafici cartesiani, configurazioni bidimensionali di forme monodimensionali ecc.

I registri discorsivi rendono possibili le operazioni di enunciazione di qualcosa, di designazione e di espansione discorsiva (articolare frasi in una unità coerente, come il ragionamento, la descrizione o la spiegazione). I registri non discorsivi non godono di questa struttura. I registri monofunzionali sono specifici della matematica: in tali registri i trattamenti possono assumere la forma di algoritmo (ad esempio nell'algebra). I registri multifunzionali, invece, sono utilizzati anche al di fuori della matematica, principalmente con funzioni di comunicazione o di oggettivazione: in essi i trattamenti non possono essere posti sotto forma di algoritmo, in quanto la grande varietà di operazioni discorsive (enunciati, designazioni, ragionamenti, descrizioni, spiegazioni ecc.) e non discorsive (illustrazioni, manipolazioni, costruzioni o decostruzioni di figure) che essi permettono di effettuare è irriducibile a un insieme di istruzioni. Per esempio, per giustificare la formula dell'area del rombo si possono effettuare differenti trattamenti nel registro multifunzionale della lingua naturale e, allo stesso tempo, nel registro multifunzionale delle configurazioni geometriche (D'Amore, Fandiño Pinilla & Iori, 2013). Che siano mono- o multifunzionali, si può inoltre notare che i diversi registri, per comunicare, si servono di segni di natura diversa, che sollecitano dunque diversamente il ricevente: si possono avere simboli astratti e convenzionali (come le lettere dell'alfabeto oppure i simboli per la notazione numerica, i simboli in uso nei linguaggi formali ecc.), ma anche segni iconici che richiamano la realtà designata.

Prese tutte e tre assieme, le caratteristiche dei registri semiotici (formazione di una rappresentazione identificabile, trattamento e conversione) hanno importanti ripercussioni in termini di apprendimento (D'Amore, Fandiño Pinilla & Iori, 2013), come espresso esplicitamente in D'Amore (2001, p. 166): «che cosa vuol dire “costruzione della conoscenza in matematica” se non proprio l'unione di quelle tre “azioni” sui concetti, cioè l'espressione stessa della capacità di *rappresentare* i concetti, di trattare le *rappresentazioni* ottenute all'interno di un registro stabilito e di *convertire* le rappresentazioni da un registro ad un altro?».

Ora, nei libri di testo di geometria di scuola primaria e secondaria di primo grado vi è una forte presenza di rappresentazioni semiotiche afferenti a diversi registri. In questo libro abbiamo scelto di concentrare l'attenzione sui due registri prevalenti,

derivanti dalla natura stessa degli oggetti matematici in gioco e dai livelli scolastici considerati: il registro discorsivo multifunzionale della lingua naturale (nel caso specifico la lingua italiana) e il registro non discorsivo multifunzionale delle configurazioni figurali (che chiameremo in questo contributo *registro figurale*). Nei libri di testo considerati è presente anche il registro discorsivo monofunzionale delle scritture simboliche geometriche¹¹, ma per la nostra trattazione risulta meno significativo, ricco e frequente rispetto ai due casi di registri sopra menzionati. Questi sistemi di segni non compaiono isolati, ma spesso si mescolano tra loro, facendo a volte addirittura le veci dei verbi, come in «Se $x > 1$, allora $x^2 > 1$ ». Questa compresenza di diversi sistemi semiotici fa sì che essi si influenzino a vicenda, cosa che può essere complessa per i destinatari, ai quali è richiesto di acquisire una certa padronanza e una certa flessibilità per passare dall'uno all'altro. Teniamo conto che quella della «sinonimia» (nel senso lato di “poter dire la stessa cosa in uno o più altri modi”) è una proprietà caratteristica di certi linguaggi, come spiegato da De Mauro (2019, pp. 60-63), che possono applicarla all'interno del loro sistema semiotico o, come ora illustrato, tra un sistema e un altro.

2.5 Il fondamentale ruolo del registro figurale nell'apprendimento della geometria

Abbiamo visto quanto risulta importante per l'apprendimento della matematica considerare le attività cognitive che contemplano il passaggio tra le diverse rappresentazioni espresse nei vari registri semiotici. In particolare, nell'apprendimento della geometria, oltre al registro verbale assume un'importanza fondamentale quello figurale.

Non a caso è stato messo in evidenza da Fischbein fin dal 1963 come in geometria non ci sia concetto senza figura, nel senso che gli oggetti geometrici sono entità che possiedono contemporaneamente proprietà di tipo concettuale e di tipo figurale: è in questo senso che tali oggetti sono chiamati dall'autore *concetti figurali*.

Una figura geometrica può essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica non è un puro concetto. È un'immagine, un'immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. [...] tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurali.

(Fischbein, 1993, pp. 141-142, traduzione degli autori)

¹¹. Ad esempio, il linguaggio simbolico che identifica un lato con una coppia di lettere maiuscole (AB, BC, CD ecc.), un vertice con una lettera maiuscola (A, B, C ecc.), un angolo con una lettera maiuscola sormontata da un accento circonflesso (\hat{A} , \hat{B} , \hat{C} ecc.).

In psicologia, concetti e immagini sono considerati due categorie distinte di entità mentali: i concetti sono rappresentazioni ideali di una classe di oggetti o di un fenomeno, mentre le immagini sono rappresentazioni sensoriali di un oggetto o di un fenomeno. Nei ragionamenti geometrici, però, queste due entità non sono così indipendenti: in una dimostrazione, per esempio, si operano alcuni passaggi, come se gli oggetti fossero reali, pur usando informazioni di natura concettuale. Quando operiamo con enti geometrici, consideriamo le loro caratteristiche ideali, ma senza distinguerle dall'immagine concreta cui ci riferiamo. Ad esempio, quando si disegna un certo triangolo ABC su un foglio per verificarne delle proprietà, non ci si riferisce al particolare disegno, ma a una certa figura che rappresenta una classe infinita di oggetti, ossia ci si riferisce alla categoria universale dei triangoli. Da queste considerazioni si può concludere, in linea con il pensiero di Fischbein, che gli oggetti del ragionamento in geometria non sono né puri concetti, né pure immagini, bensì «entità mentali, chiamate da noi *concetti figurali*, che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo, possiedono qualità concettuali – come l'idealità, l'astrattezza, la generalità, la perfezione» (Fischbein, 1993, p. 143, traduzione degli autori). I concetti figurali includono quindi la figura come proprietà intrinseca, intesa come immagine interamente controllata dalla definizione. Ci troviamo dunque di fronte a una complessità non eliminabile, data dalla presenza di qualità concettuali e figurali: riuscire a coordinare e armonizzare fra loro questi due aspetti – generali e ideali da un lato, particolari e sensibili dall'altro – è un'impresa complessa, ma tuttavia necessaria dal punto di vista didattico per favorire l'acquisizione dei concetti in gioco (Sbaragli, 2006a).

Dal punto di vista dell'analisi dell'architettura testuale è fondamentale fare i conti con questo aspetto caratterizzante e analizzarlo. In particolare, all'interno di un libro di testo di geometria entrano necessariamente in gioco rappresentazioni linguistiche e figurali che si integrano l'una nell'altra, a volte sostenendosi, a volte addirittura ostacolando l'apprendimento del sapere in gioco. La figura, se ben scelta, può infatti facilitare l'interpretazione e la codifica di informazioni fornite dal testo, attivando quelle parti della rappresentazione che altrimenti occorrerebbe recuperare dalla memoria a lungo termine, e può allo stesso tempo aiutare il processo di costruzione di un modello mentale della situazione descritta dal testo (Johnson-Laird, 1983; Paivio, 1986). Ma non sempre questo avviene e ciò dipende da diverse ragioni: le modalità con le quali le figure e le parti testuali vengono realizzate e integrate le une con le altre (aspetto che analizzeremo nel **par. 5.5.2**)¹²; le modalità con cui il testo e la figura vengono elaborati e integrati dal lettore. Alcune ricerche

12. In questo senso, le scelte dei tratti distintivi delle varie rappresentazioni che veicolano le informazioni hanno un ruolo decisivo sull'apprendimento del concetto da parte del lettore, in particolare le diverse rappresentazioni semiotiche con cui uno stesso concetto è presentato.

mostrano infatti che i lettori spesso utilizzano le figure in modo superficiale e inadeguato, perché si accontentano di ricavarne il “succo”, e questa facilità di codifica dà al lettore l’illusione di una comprensione piena (Peek, 1994; Weidenmann, 1994); viceversa, altre volte le ricerche mettono in evidenza che il lettore considera la parte linguistica la fonte di informazione più importante e quindi dedica attenzione solamente o soprattutto a questa parte, non dando peso alla componente figurale (Paoletti, 2004; 2007a); infine, va considerato che a volte il lettore sceglie modalità di elaborazione che richiedono uno sforzo cognitivo limitato, non integrando entrambi i registri tra loro e scegliendo di seguire un principio di *economia cognitiva* (Paoletti, 2007b; Schnotz, 1991; 2005).

Il dato imprescindibile rimane per noi il fatto che, quando il testo è accompagnato da una figura, l’informazione è presentata attraverso due diversi registri che vanno entrambi considerati coordinando i due processi di codifica. L’integrazione delle informazioni provenienti dalle due fonti consente in effetti di formarsi una rappresentazione delle informazioni più completa e corretta: non sempre il testo o la figura, presi separatamente, contengono tutte le informazioni rilevanti e non sempre vengono presentati nella forma più adatta alla loro elaborazione e memorizzazione (Paoletti, 2011).

2.6 Le difficoltà linguistiche nell’apprendimento della matematica

Dopo aver descritto ed esaminato, anche dal punto di vista storico, i tratti peculiari della lingua speciale della matematica e la pluralità di elementi in essa coinvolti, concentriamoci ora in particolare sui principali aspetti di potenziale difficoltà che gli apprendenti possono incontrare nell’affrontare le parti linguistiche di questo particolare codice comunicativo.

2.6.1 Lingua come tramite, lingua come (possibile) ostacolo

Nonostante l’essenza multimodale del linguaggio matematico, la componente propriamente linguistica riveste in esso un ruolo notevole, che sia isolata o affiancata e in dialogo con registri diversi e con diverse forme di rappresentazione. Non a caso, numerosi autori nell’ambito della didattica della matematica hanno evidenziato come tra le cause delle difficoltà di apprendimento della matematica da parte degli studenti vi siano proprio l’acquisizione, la comprensione e la gestione del suo linguaggio (espresso nel registro linguistico) che, come è emerso dai paragrafi precedenti, risulta essere assai complesso a più livelli.

La lingua dell’uso può diventare, infatti, una sorta di “intralcio supplementare” (spesso inevitabile) nell’acquisizione di conoscenze matematiche e, se non adeguatamente padroneggiata, rischia di essere uno dei più pervasivi ostacoli. Inol-

tre, se facciamo nostra l'ipotesi di Sfard (2000), che interpreta il pensiero come forma di comunicazione e considera il linguaggio non come veicolo di significati preesistenti, ma come costruttore dei significati stessi, e se consideriamo come la lingua possa orientare la costruzione del pensiero, allora possiamo ipotizzare che una padronanza linguistica debole, povera e poco precisa non aiuti la costruzione di un solido sapere specifico (in questo caso, matematico).

Le potenziali difficoltà linguistiche che l'allievo incontra sulla strada della scoperta e dell'apprendimento della matematica sono quindi molte: dal lessico (composto di terminologia specialistica e circoscritta o, all'opposto, di parole polisemiche fino a rasentare l'ambiguità) alla morfosintassi (caratterizzata da strutture non sempre facili da gestire), alla semantica (caratterizzata da un fitto sistema di significati e di contenuti in relazione con altri), fino ad aspetti legati alla pragmatica (deissi, inferenze, impliciti a carico del lettore).

Per muoversi in questo quadro, la linguistica offre alla ricerca in didattica della matematica paradigmi e strumenti utili per analizzare il linguaggio disciplinare di per sé e in relazione ai suoi fruitori: ad esempio, l'attenzione alle caratteristiche funzionali dei diversi tipi testuali, quanto mai attuale in prospettiva didattica; i metodi di analisi della linguistica testuale, che considera il testo nelle sue unità e nelle relazioni che le legano; il concetto di leggibilità, che cosa lo determina e le sue relative misurazioni (da distinguere rispetto alla comprensibilità); o ancora i criteri per indagare specifici livelli linguistico-informativi (come la qualità del lessico, la sintassi, la progressione tematica, la densità informativa).

Vediamo dunque, nei prossimi paragrafi, di illustrare brevemente due tratti linguistici peculiari con cui gli allievi si trovano confrontati nell'interpretazione del testo matematico (e, più in generale, del linguaggio della matematica): il lessico e la sintassi. A essi corrispondono anche due risorse linguistiche di base di cui gli allievi dovrebbero disporre nella lingua dell'uso, raggiungendo almeno livelli essenziali di padronanza, per potersi addentrare nella scoperta e nell'acquisizione di una lingua speciale, con le sue specificità che la distanziano dalla lingua del quotidiano. Ovviamente, lessico e sintassi non andranno poi osservati in isolamento, ma nella realtà dei testi, considerando, cioè, l'essenziale funzione testuale che è propria dei linguaggi, anche di quelli specialistici (come ricorda P. L. Ferrari, 2021, riprendendo le metafunzioni di Halliday).

Va inoltre considerato che entrare in una disciplina attraverso il suo linguaggio è una sfida educativa estremamente complessa, che non può e non deve ridursi a qualche parola o frase ripetuta, ma deve idealmente portare a una crescente padronanza linguistico-comunicativa, competenza imprescindibile per l'acquisizione disciplinare.

2.6.2 La matematica tra parole e termini: lessico specialistico e lessico dell'uso comune

Come normalmente accade quando ci si trova confrontati con un sottocodice linguistico che riguarda un particolare ambito del sapere, anche per quanto concerne la matematica l'acquisizione del suo linguaggio "speciale" è spesso in contrasto con la lingua utilizzata fuori dal contesto scolastico (Bernardi, 2000; D'Amore, 1999; 2000; Demartini, Franchini & Sbaragli, sottomesso; P. L. Ferrari, 2003; Laborde, 1995; Maier, 1993; 1995). Come ha sottolineato D'Amore (2000), l'allievo deve infatti entrare in contatto con diversi livelli di difficoltà linguistica: parole del tutto nuove (ad esempio il termine *ortocentro*, legato in modo specialistico alla disciplina e che non si trova usato al di fuori di essa); costrutti linguistici speciali (come "si bisecano scambievolmente a metà" per le diagonali di un parallelogrammo); attese semantiche diverse (ad esempio la "proprietà associativa", che, se interpretata secondo il lessico comune, sembra che *associa* i termini, leggendo l'uguaglianza da una parte, e che li *dissocia*, leggendola dall'altra parte; per questo c'è chi ipotizza, sbagliando, che esistano due proprietà: associativa e dissociativa, mentre in realtà la proprietà è unica); deve inoltre fare uso di parole polisemiche, che il più delle volte assumono significati diversi rispetto a quelli circolanti nella lingua comune (ad esempio parole come *angolo*, *punto*, *area* ecc., su cui si può vedere l'indagine di Demartini, Fornara & Sbaragli, 2018).

Tra i vari aspetti delle lingue speciali, il primo a essere percepito come "diverso" dall'uso comune è proprio quello lessicale. Il linguaggio della matematica, altamente lessicalizzato (come mostrato al **par. 2.1**), accanto alle parole del quotidiano presenta infatti un ampio repertorio di termini specialistici (Lavinio, 2004) sedimentati nei secoli, nel discorso primario e, ancor più, in quello secondario per la scuola. Riprendendo la distinzione proposta da D'Amore, i termini del tutto nuovi presentano particolari caratteristiche per l'allievo: magari non ne padroneggia il significato, non li sa usare, non li ricorda, ma, una volta che vanno a far parte del suo magazzino lessicale, essi sono appannaggio del solo ambito semantico della matematica. Per un approfondimento sulla comprensione e gestione dei termini specialistici della geometria da parte degli allievi all'ingresso della scuola secondaria di primo grado, si vedano i lavori di Demartini, Franchini e Sbaragli (sottomesso) e Sbaragli, Demartini e Franchini (2021), in cui vengono presentate anche diverse categorizzazioni circolanti nella letteratura della didattica della matematica inerenti le parole del vocabolario della matematica, che specificano le distinzioni presentate in questo paragrafo.

In matematica, però, sono ricorrenti anche quelli che potremmo chiamare *termini-parole*: tecnicismi che hanno un significato specifico e intensivo in matematica, ma ne hanno più d'uno al di là dei confini disciplinari, presentandosi nel repertorio lessicale dell'apprendente come polisemici. Tale polisemia, spesso

caratterizzata dalla presenza di significati anche molto comuni nella lingua del quotidiano (si pensi a *punto*, a *figura* o a *contorno*), è certamente qualcosa con cui fare i conti in sede didattica, perché determina un sapere preesistente nel bambino, che spesso, se non adeguatamente distinto dall'ambito specialistico, può interferire con esso.

Numerose ricerche in didattica della matematica hanno infatti messo in evidenza come molte delle difficoltà linguistiche degli studenti nell'apprendimento della disciplina siano riconducibili proprio alle interferenze che l'impiego comune della lingua naturale genera nell'acquisizione del linguaggio specialistico (Bernardi, 2000; D'Amore, 1999; 2000; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2018; P. L. Ferrari, 2003; Laborde, 1995; Maier, 1993; 1995; Sbaragli, Demartini & Franchini, 2021). Ciò conferma che il linguaggio della matematica è influenzato dalla lingua comune più di quanto potrebbe apparire a prima vista, soprattutto sul piano lessicale: a riprova del contatto fra i contesti d'uso, la stessa storia della lingua scientifica documenta, per l'italiano, numerose «parole comuni tecnificate» (Gualdo & Telve, 2011, p. 219) e si caratterizza per un'incessante «tensione tra usi speciali della lingua e linguaggio quotidiano» (De Mauro, 2014, p. 229). Se questa, a volte, può risultare una risorsa vincente sul piano didattico, altre volte può costituire un ostacolo, in quanto gli alunni tendono ad applicare pratiche interpretative tipiche del linguaggio quotidiano al contesto della matematica, che ne richiederebbe altre. Accade quindi spesso quanto sintetizzato da Maier (1993, p. 4):

Si può parlare di miscuglio dei sensi per descrivere quello che sembra avvenire nella mente degli allievi che cercano di dare nuovi sensi a dei termini che, nella loro mente, possiedono di già il carattere di idee stabili dal loro uso nella comunicazione quotidiana. Il senso "vecchio", che l'allievo ben conosce, disturba la comprensione del nuovo senso, e se l'allievo riesce ad integrare quest'ultimo, per molto tempo si pone il problema della distinzione tra il senso matematico e gli altri sensi.

Questo " porsi il problema" rispetto ai diversi sensi e agli ambiti d'uso delle parole citato da Maier è indice del maturare di una competenza metalinguistica essenziale per entrare nella matematica e nel suo linguaggio: quella che permette all'apprendente di riflettere sul significato delle parole in termini di adeguatezza e pertinenza al contesto.

2.6.3 Morfosintassi peculiare del linguaggio della matematica

Un altro aspetto rilevante per la comprensione è l'uso di una sintassi particolare (o, meglio, di una morfosintassi), caratterizzata da strutture a volte artificiose, che

tendono a “elevare” il linguaggio matematico in un contesto – quello dell’aula – in cui al contrario sarebbe necessario renderlo più vicino agli allievi. Sebbene sia comune a vari linguaggi specialistici, il fenomeno risulta molto marcato in matematica: il discorso matematico prevede, infatti, costrutti linguistici speciali tradizionalmente presenti nei libri di testo, che vengono utilizzati dai docenti anche in situazioni e in livelli scolastici per i quali rischiano di rivelarsi davvero inadeguati e poco efficaci per la comprensione. Accade, insomma, che la lingua della matematica, con le peculiarità tipiche del discorso disciplinare primario, in contesto scolastico assuma addirittura la forma di una particolare varietà linguistica che D’Amore (1993; 2000), sulla scia dei già esistenti *scolastichese*, *burocratese*, *politichese*, ha chiamato “matematichese”. Si pensi a forme e a costrutti del tipo “dicesi”, “si bisecano scambievolmente a metà”, “passanti per” ecc., che appesantiscono la trattazione e inducono l’allievo a crearsi un modello fittizio di linguaggio specialistico, da ripetere acriticamente nelle proprie verbalizzazioni perdendo di vista il più delle volte il senso della comunicazione. La lingua smette, così, di essere uno strumento per capire.

A questo proposito sono evidenti anche le difficoltà ad articolare verbalmente la propria conoscenza matematica senza cadere in ripetizioni mnemoniche, soprattutto nell’arco della scuola dell’obbligo. Questo si amplifica nella scuola secondaria di primo grado, in cui gli allievi non hanno ancora acquisito la padronanza della lingua comune in tutte le sue possibilità, ma si trovano confrontati con le prime richieste di formalizzazione del linguaggio matematico (P. L. Ferrari, 2003). Gli studenti sono inoltre già stati esposti per anni alla versione scolastica del discorso specialistico matematico, con le sue abitudini radicate, i suoi stilemi tipici e le prassi manualistiche. Tale esposizione, però, spesso si rivela inefficace, perché è stata affrontata senza un adeguato percorso di educazione alla lettura e alla comprensione di tali testi.

Oltre che per certi costrutti speciali e cristallizzati (come il citato “si bisecano scambievolmente a metà”), la morfosintassi del testo scolastico di matematica si caratterizza anche per aver inglobato, sebbene con alcune sfumature, le principali peculiarità del discorso matematico primario evidenziate al **paragrafo 2.1**: l’universalità, l’atemporalizzazione, la deagentivizzazione. Queste possono originare particolari difficoltà per gli allievi, soprattutto considerandone la diffusissima presenza nei testi.

L’alto numero di sostantivi densamente informativi a svantaggio delle forme verbali (che mostrano anche una bassa varietà), che a volte si realizza anche in nominalizzazioni, genera un discorso deagentivizzato, privo dei tratti più vicini alla lingua del bambino; analogamente, l’assenza di ancoraggi temporali e contestuali origina un discorso atemporalizzato e lontano dalla realtà (fatti salvi alcuni richiami più o meno fittizi a contesti del quotidiano, funzionali alla trattazione). Nel concreto delle forme linguistiche, l’abbondanza di forme nominali del verbo

(che veicolano i legami logici in forma implicita), di forme impersonali e passive è considerata un indicatore di difficoltà per la comprensione, in quanto l'interpretazione resta maggiormente a carico del lettore. Ne consegue che, spesso, anche le frasi brevi e giustapposte del testo scolastico possono non essere semplici da interpretare, bensì dense di significato; per contro, se i periodi sono lunghi e ipotattici, i lettori possono incontrare difficoltà già a livello di decodifica e, poi, di interpretazione.

2.6.4 Educazione linguistica e linguaggio della matematica: l'unione delle competenze

Come si è accennato, nell'educazione al linguaggio della matematica, oltre alle difficoltà specifiche legate al lessico e alla sintassi peculiari, non vanno sottovalutati alcuni problemi di comprensione e di comunicazione legati alla mancata padronanza della lingua comune da parte degli allievi (D'Aprile *et al.*, 2004; P. L. Ferrari, 2004). È infatti opinione condivisa da chi si occupa di didattica della matematica – insegnanti di ogni grado di istruzione e ricercatori – che le difficoltà nell'apprendimento della matematica non sono legate soltanto al suo linguaggio specifico, ma abbiano a che fare anche con più vasti problemi di comprensione e verbalizzazione, conseguenti a una ristretta e limitata competenza linguistica di base (si veda, ad esempio, P. L. Ferrari, 2004). A questo proposito, D'Aprile *et al.* (2004, p. 32) affermano:

non occorre frequentare convegni di didattica e leggere riviste specialistiche per sapere che una notevole parte delle difficoltà d'insegnamento e d'apprendimento della matematica si genera nell'atto stesso del comunicare questa scienza, attraverso il principale mezzo d'interazione tra esseri umani, cioè il linguaggio naturale.

In questo senso, potremmo dunque sostenere che la questione dell'educazione alla lingua delle discipline, nella fattispecie della matematica, è una parte fondamentale della più ampia idea di educazione linguistica da incentivare e promuovere a scuola. Un esempio di tale necessità è dato dai risultati delle prove standardizzate somministrate in Canton Ticino a tutti gli allievi di quinta primaria (Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2017; Sbaragli & Franchini, 2017), dai quali è emerso come le carenze in ambito linguistico possano incidere profondamente sulla risoluzione di problemi (a volte compromettendola) e come tali carenze siano diffuse e radicate (su questo si veda anche l'esperienza di Fornara & Sbaragli, 2017).

In quest'ottica, l'apporto delle analisi linguistiche alla didattica della matematica acquisisce importanza decisiva. Proprio grazie all'unione delle competenze della linguistica e della matematica è possibile, infatti, avviare un effettivo cambiamento della ricerca fino a oggi effettuata, e delle sue ricadute nella didattica e

nella manualistica, accogliendo e concretizzando quella prospettiva di educazione linguistica trasversale approfondita in lavori quali Lavinio (2004) e Colombo e Pallotti (2014). Proprio secondo tale prospettiva è necessario sostenere il linguaggio specialistico con un impiego corretto, coerente e coeso della lingua comune, su cui esso si innesta. Non solo: è utile anche riflettere sul compromesso tra rigore disciplinare e ricorso alla lingua di più largo uso che, nei primi anni di avvicinamento alla disciplina, è necessario trovare per costruire gradualmente e profondamente il sapere specifico in gioco. Lo studio del linguaggio della matematica e della forma che esso assume a scuola, delle difficoltà che incontrano gli allievi per acquisirlo, comprenderlo e gestirlo, e di come può essere più efficacemente proposto in didattica anche tramite i libri di testo, rappresenta quindi una priorità della ricerca, col fine ultimo di prestare giusta attenzione agli allievi, ai loro bisogni e alle loro reali (e differenziate) esigenze nel campo dell'educazione linguistica.

In concreto, si auspica che questo lavoro, pur essendo focalizzato solo sui libri di testo, possa offrire alcuni spunti e indicazioni utili per aiutare chi si occupa di didattica e di trasposizione del sapere matematico (docenti, autori, editori ecc.) a «mettersi nei panni di un destinatario non solo meno dotato di risorse lessicali e sintattiche, ma meno dotato di quelle conoscenze enciclopediche di base che si è abituati a dare per note nella comunicazione scientifica» (Colombo, 2002, p. 68). Questo con l'intento di mirare alla costruzione di un'autentica e ambiziosa competenza trasversale che superi le attuali definizioni di competenza nettamente separate l'una dall'altra (ripercorse in P. L. Ferrari, 2021): una competenza di gestione del testo matematico che permetta all'allievo di entrare nella disciplina e nel suo linguaggio con consapevolezza e controllo metacognitivo.

3.1 La lingua dei libri di testo scolastici

Nell'esperienza scolastica, l'uso dei libri di testo delle materie di insegnamento porta gli studenti a entrare in contatto con i primi esempi di lingue speciali dell'italiano¹, ciascuna con le proprie specificità legate alle diverse discipline. Nel susseguirsi degli anni, attraverso i manuali delle varie materie, da quelle umanistiche a quelle scientifiche, lo studente scopre come ciascun ambito di studio ricorra a uno specifico codice linguistico in base a peculiari necessità legate alle caratteristiche della disciplina e, più nello specifico, ai contenuti da trattare; si scopre così come ogni disciplina scolastica specializzi le risorse linguistiche – testualità, sintassi e lessico – e selezioni i vari registri semiotici e gli aspetti multimodali a seconda dei propri bisogni comunicativi.

Il testo scolastico appartiene, nel suo insieme, al tipo testuale informativo (o espositivo), o, ancora meglio, al tipo «espositivo-esplicativo» (A. Ferrari, 2019, p. 78)², e presenta tratti ricorrenti, cristallizzati in prassi sedimentate. Ciò riguarda tutte le discipline scolastiche, ciascuna con tipicità diverse. Analogamente, per tutte le discipline il testo scolastico è solitamente caratterizzato da una dissimmetria cognitiva tra autore e destinatario, il quale – in teoria – dovrebbe trovarsi di fronte un testo da cui gli sia possibile comprendere i significati di ciò che è presentato con il fine di apprendere. Insomma, riprendendo una nota suddivisione della comunicazione scientifica proposta da Anne Marie Loffler-Laurian (1983, pp. 8-20)³, i manuali scolastici rappresentano un esempio di «discorso scientifico pedagogico», in cui le esigenze specialistiche delle diverse discipline devono venire a patti con la necessità di guidare un pubblico di non specialisti alla comprensione di concetti complessi; un pubblico che deve diventare esperto di quel campo del sapere e appropriarsi con la dovuta gradualità del linguaggio specialistico specifico.

1. Per una definizione del concetto di "lingua speciale" e per la sua collocazione nella discussione linguistica in Italia si rimanda a Cortelazzo (1994a; 2011) e a Gualdo e Telve (2011). Per una rassegna degli studi sulla lingua speciale della matematica si veda, tra gli altri, la sintesi di Viale (2019, pp. 57-71).

2. Per i tipi di testo si considera come riferimento la tipologia funzionale di Werlich (1982) – sintetizzata, insieme ad altre, in Lala (2011) –, che li classifica in *narrativo*, *descrittivo*, *argomentativo*, *informativo*, *regolativo* (si vedano anche Lavinio, 2000 e Mortara Garavelli, 1991). Tali tipi si realizzano in generi testuali più o meno vincolanti dal punto di vista interpretativo (secondo Sabatini, 1999): il testo scolastico si configura come un testo mediamente vincolante (semplificando: lo è più di un testo letterario ma meno di un manuale tecnico), pensato per spiegare a chi non sa.

3. La proposta di Loffler-Laurian ripresa nel contesto italiano nelle sintesi di Cortelazzo (1994b, p. 9) e di Dardano (2008, p. 180), suddivide la comunicazione scientifica in sei diversi tipi di "discorso": 1) discorso scientifico-specialistico; 2) discorso di semidivulgazione scientifica; 3) discorso divulgativo scientifico; 4) discorso scientifico-pedagogico; 5) discorso del tipo "tesi universitaria"; 6) discorso scientifico-ufficiale, rivolto ad amministratori e politici.

In altri termini, se i testi scientifici in senso stretto, attraverso discorsi primari, intesi come comunicazione tra esperti, veicolano la ricerca scientifica e si pongono come obiettivo la produzione di nuove conoscenze, i testi didattici, invece, attraverso discorsi secondari, di comunicazione tra “esperto” e “profano”, cercano di guidare verso apprendimenti il più possibile sistematici.

In questa sistematicità dell'apprendimento come punto di arrivo atteso sta forse la principale differenza tra libri di testo scolastici e testi divulgativi, che presuppongono una conoscenza più circoscritta: in un certo senso, la manualistica scolastica rappresenta un discorso che si rivolge idealmente a “profani”, ma con l'obiettivo di renderli “esperti” di quel settore di studio e del rispettivo linguaggio peculiare a seconda dello stadio cognitivo dello studente.

Questa specificità dei manuali scolastici si manifesta in una serie di scelte linguistiche che li differenziano dai testi specialistici rivolti esclusivamente ad “addetti ai lavori”. Tra queste, rispetto ai discorsi primari, i manuali scolastici ricorrono a procedimenti argomentativi accorciati, che, a seconda del ciclo scolastico a cui si rivolgono, non rispettano la rigida sequenzialità tipica del discorso specialistico; i libri di testo scolastici tendono spesso alla “narrativizzazione” dei concetti (Dardano, 2008, p. 181) e a strategie retoriche infrequenti nei testi specialistici, come ad esempio forme di contatto diretto con il lettore e di rinvio alla sua esperienza personale o ad avvenimenti particolari.

A differenza sia dei testi specialistici primari sia di quelli divulgativi, i libri di testo scolastici sono caratterizzati dalla presenza, variabile a seconda delle tradizioni delle singole discipline e del mutare di scelte editoriali nel tempo, di apparati di attività laboratoriali, problemi ed esercizi diversificati. Queste attività, problemi ed esercizi, tradizionalmente collocati al termine di ogni capitolo, sono da qualche tempo sempre più frammezzati alla trattazione stessa, costituendo una sorta di percorso unico tra teoria e applicazione pratica a sostegno della comprensione dei concetti esposti.

I testi scolastici in generale (ma soprattutto quelli di matematica) si servono inoltre di espedienti figurati per supportare l'apprendimento e di grafici per indirizzare visivamente il destinatario: a volte le scelte risultano funzionali ed efficaci, altre volte meno (Canducci, Rocci & Sbaragli, 2021). Dal punto di vista grafico, si usano corsivo, grassetto, sottolineatura, colori diversi, simboli e icone. Le scelte di stile cambiano da un livello scolastico all'altro, ma rimangono sempre caratterizzanti ed evidenti in questo genere di testi.

Tornando agli aspetti propriamente linguistici, la sintassi dei libri di testo scolastici si trova in genere nella posizione di espungere o comunque limitare i tratti peculiari tipici dell'ambito disciplinare: ad esempio, rimanendo in ambito scientifico, i manuali si sforzano di non abusare della spersonalizzazione dell'agente tipica dei testi scientifici “duri”, resa attraverso un uso sistematico di forme passive e imper-

sonali tese a focalizzare l'attenzione sull'azione piuttosto che su chi la compie (per l'uso del passivo nei testi scientifici, si veda Viale, 2010).

L'obiettivo linguistico cui i libri scolastici tendono è che il discorso risulti sì preciso, rigoroso e dotato delle specificità attese, ma anche scorrevole e non eccessivamente ostico per l'apprendente, coerentemente con le finalità didattiche dell'esposizione manualistica (La Grassa & Troncarelli, 2014; 2015). Anche dal punto di vista lessicale la terminologia dei manuali non può mai essere data per scontata, come avviene di norma nei testi specialistici, ma deve sempre risultare mediata dalla lingua comune attraverso una serie di strategie di definizione e commento o illustrata da veri e propri apparati lessicali, come glossari o box di approfondimento terminologici. I libri di testo scolastici delle diverse discipline cercano di creare nel lettore un vocabolario specialistico, dando per presupposto soltanto ciò che è stato precedentemente presentato ed esercitato in un processo di costruzione progressiva e sistematica; tutto ciò si contrappone alla semplice divulgazione, che, invece, riduce all'essenziale il ricorso alla terminologia (e talvolta vi rinuncia del tutto).

La particolare posizione intermedia tra testo divulgativo e testo specialistico in cui si trovano i libri di testo scolastici fa sì che risultino una sorta di "ibrido" (Viale, 2019, p. 41) o comunque una "categoria non pacifica" (Cortelazzo, 1994b, p. 3) in continua fase di ripensamento e adeguamento, fonte di discussione sia da parte degli addetti all'editoria scolastica che degli stessi specialisti disciplinari.

Eppure, i libri di testo scolastici rappresentano un'imprescindibile fonte di contatto linguistico per gli studenti, con concrete realizzazioni della "dimensione orizzontale" dei linguaggi specialistici, «in relazione alla varietà dei contenuti» e alle diverse discipline presenti (Cortelazzo, 1994a, p. 3). Successivamente, i testi diventeranno per loro anche luogo di sperimentazione della "dimensione verticale" (cioè dello stratificarsi secondo una crescente elaborazione), con il progredire dell'esperienza scolastica e col graduale aumento del livello di specializzazione e peculiarità linguistica.

In altri termini, la lingua dei libri di testo scolastici rappresenta un importante elemento di realizzazione di quella "educazione linguistica trasversale" preconizzata già nel 1975 dalle *Dieci tesi per l'educazione linguistica democratica* del GISCEL⁴, che per prime evidenziavano la necessità di «coinvolgere nei fini dello sviluppo delle capacità linguistiche non una, ma tutte le materie, non uno, ma tutti gli insegnanti» (Tesi VII).

4. Il testo delle *Dieci tesi* si può ora leggere al link <https://giscel.it/dieci-tesi-per-leducazione-linguistica-democratica/>; è inoltre disponibile la rilettura aggiornata a cura di Loiero e Lugarini (2019).

3.2 L'italiano dei libri di testo scolastici di matematica

Quanto osservato per i libri di testo scolastici nel loro complesso vale a maggior ragione per quelli delle discipline scientifiche e di matematica in particolare. Questi rappresentano per gli studenti uno dei primi esempi – per molti l'unico – di testo scientifico con cui confrontarsi. Nota infatti Cortelazzo (1994a, p. 81):

È nella scuola che avviene il primo incontro sistematico tra il parlante e la lingua delle scienze (che non entra normalmente a far parte dell'apprendimento primario che si attua nella famiglia), e dall'addestramento che viene fatto nella scuola possono dipendere molte delle successive possibilità del parlante di superare le barriere linguistiche legate alla specificità della lingua scientifica.

Rispetto ai libri di testo scolastici di altre discipline, quello di matematica è caratterizzato da peculiarità legate alla complessità e varietà degli ambiti illustrati (aritmetica, geometria, algebra ecc.), alla molteplicità dei registri semiotici coinvolti (figurale, simbolico, aritmetico, spiegazioni in linguaggio naturale ecc.), fino alla necessità di separare in alcuni casi una parte più prettamente teorica da una pratica, con problemi ed esercizi di vario tipo. Inoltre, nel testo di matematica è necessario che le informazioni considerate note precedano quelle considerate nuove, creando così una struttura sequenziale che permetta di creare quel gigante (la matematica stessa) di cui parla nel XX secolo il grande storico statunitense Morris Kline: gigante al quale attribuisce, però, i "piedi di argilla", in quanto non ha fondamenta stabili (gli enti primitivi di partenza).

Un ulteriore elemento da riportare è che il libro scolastico di matematica rappresenta un testo in continua evoluzione come contenuti, lingua, impostazione e che varia a seconda dei cicli scolastici, con livelli di complessità crescenti, e diverso a seconda dei tipi di scuola. Oggi, almeno apparentemente, la sua impostazione può risultare variegata: nel corso degli ultimi decenni, infatti, nel contesto italofono si è verificata la tendenza a passare da una "fredda" esposizione teorica dei concetti matematici con qualche esempio di esercizio svolto, a una presentazione rinnovata da forme comunicative nuove e più aperte al confronto con l'esperienza reale e all'attualizzazione, forse anche per influenza della concretezza empirica proposta nella manualistica anglosassone. Ne derivano testi stilisticamente eterogenei (**Fig. 1**), in cui i richiami realistici o pseudo-realistici inerenti gli oggetti matematici trattati (esplicitati con vignette, sottotitoli, dialoghi...), tipici soprattutto dei livelli scolastici di base, si affiancano a parti tecniche e referenziali più astratte: cosa che rende perfettamente l'idea del continuo passaggio tra mondo reale e mondo astratto nell'apprendimento della geometria, che può portare inevitabilmente al paradosso cognitivo di Duval (**par. 2.4**). Spesso restano tuttavia evidenti i limiti dati da una certa artificiosità nei richiami a situazioni di realtà, sovente stereotipate e forzate, che non sempre si rivelano utili a stabilire un legame significativo con l'oggetto matematico in gioco.



Fig. 1 – Un breve estratto di testo per la prima secondaria di primo grado (2_6, p. 206) dà a colpo d'occhio un'idea della coesistenza di stili e formati testuali.

Negli ultimi anni, poi, forse anche per via della crescente sensibilità verso gli studenti con Disturbi Specifici dell'Apprendimento – DSA, e alla crescente presenza di studenti non madrelingua italiana, parallelamente a quanto avvenuto nei manuali di altre discipline, si è fatta maggiormente strada l'attenzione al piano della leggibilità, con qualche tentativo di semplificazione linguistica (Amoruso, 2010; International Federation of Library Association and Institutions [IFLA], 2010).

L'impostazione di differenti libri di testo scolastici può risultare dunque a prima vista diversa a seconda delle offerte editoriali, che possono essere maggiormente ancorate alla tradizione o sperimentare forme nuove di esposizione. Eppure, sotto a un quadro apparentemente vario e mutevole, permane da un'edizione a un'altra una notevole e resistente stabilità di fondo di scelte didattiche, legate a una certa tradizione considerata rassicurante per i docenti, che risulta distante dai risultati della ricerca in didattica della matematica. Tale stabilità permette di individuare alcuni tratti ricorrenti del "manuale di matematica", dando conto di alcuni aspetti strutturali e linguistici generali.

Per quanto concerne l'organizzazione complessiva, la suddivisione del manuale in parti (sezioni, capitoli, paragrafi) rispecchia l'ordine e la modalità espositiva dei temi: alcuni testi scelgono per i singoli temi una modalità *top-down*, cioè partono dagli aspetti generali di un argomento (ad esempio i *quadrilateri*) e procedono poi nel particolare (ad esempio i *quadrati*); altri – una minoranza – scelgono l'impostazione inversa, *bottom-up*, che va dal particolare al generale; vi sono inoltre testi che alternano al loro interno le due modalità. In genere, sono spie linguistiche di collegamento peculiari del testo scolastico di matematica, soprattutto nei testi per

la secondaria, i connettivi di dispositio come “in primo luogo”, “in secondo luogo”, “infine” ecc., che scandiscono l’organizzazione logica e la progressione compositiva del discorso d’insieme.

Dal punto di vista testuale, poi, il libro di testo di matematica è per sua natura un testo misto, in continuo dialogo con immagini, formule ecc. L’editoria più recente ha ulteriormente enfatizzato il carattere non continuo del testo scolastico di matematica, introducendo divisioni in blocchi, moltiplicando i box di illustrazione e approfondimento, ciascuno con specifiche funzioni spesso identificate da titoli fissi (ad esempio, per limitarsi ad alcuni casi reali, *Prima di cominciare*, *Da sapere*, *Mettiti alla prova*). L’uso di elenchi puntati è poi un altro formato molto diffuso, prevalentemente quando il testo affronta parti classificatorie e descrive elementi o proprietà degli oggetti geometrici in esame.

Per quanto riguarda l’alternanza di parti teoriche e di problemi ed esercizi, questi ultimi sono passati da una apposita sezione al termine di ogni capitolo nei testi tradizionali (nei libri di testo scolastici, fino a qualche decennio fa, erano concentrati alla fine del volume), a una fitta alternanza di parti teoriche, esemplificazioni, esercizi in itinere, arrivando spesso a formare un unico flusso tra le diverse sezioni e generando, così, testi fortemente ibridi e talvolta discontinui.

La non continuità si riscontra anche nella disposizione delle parti, che spesso richiedono un andamento di lettura non lineare: sono frequenti passaggi e rimandi tra destra, sinistra, alto e basso, fra porzioni diverse di testo in dialogo l’una con l’altra (spesso appartenenti a diversi registri di rappresentazione, come quello verbale e quello figurale). Nei testi di geometria l’uso del registro figurale è infatti molto diffuso e ha la stessa funzione comunicativa di quello verbale: proprio per questo i concetti sono solitamente accompagnati da una componente figurale. Come già accennato nel **paragrafo 2.5**, il legame è così inestricabile che tali oggetti geometrici sono chiamati da Fischbein *concetti figurali*; più precisamente, si tratta di «entità astratte, generali, ideali, pure, logicamente determinabili, che però ancora riflettono e manipolano rappresentazioni mentali di proprietà spaziali (come forma, posizione, grandezze espresse metricamente)» (Fischbein, 1993, p. 160, traduzione degli autori). Coordinare e armonizzare fra loro i due aspetti – generali e ideali da un lato, particolari e sensibili dall’altro – è complesso, ma tuttavia necessario per favorire la comprensione e l’acquisizione (D’Amore, Fandiño Pinilla & Iori, 2013; Duval, 2017; Iori, 2015; Sbaragli, 2006a).

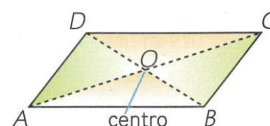
Estremamente diversificato è anche il modo di rivolgersi al lettore, con casi di alternanza talvolta molto disinvoltata all’interno della stessa pagina. In generale, se nelle parti teoriche prevalgono forme impersonali con verbi impliciti (*La misura dell’area del trapezio si trova calcolando l’area del rettangolo o del romboide e dividendo per due*) o si impersonale (*Per calcolare l’area di un segmento circolare si deve sottrarre all’area...*) e la I persona plurale (*Verifichiamo la formula data per un*

quadrilatero, un pentagono e un esagono... Supponiamo di voler costruire un poligono... Ci rendiamo subito conto che non è possibile formare...), negli esercizi e nelle sezioni operative prevalgono la II persona singolare (Traccia gli assi di ognuno dei seguenti triangoli... Disegna l'asse del segmento AB) o quella plurale (Osservate... Calcolate...), in alcuni casi alternate senza una logica specifica.

Dal punto di vista sintattico, pur con eccezioni, nei libri di testo scolastici di matematica prevale una sintassi essenziale, con frasi brevi, spesso giustapposte («Il **trapezio scaleno** ha i lati tutti non congruenti. Ha 2 angoli acuti e 2 ottusi tutti non congruenti. Ha le 2 diagonali non congruenti», 10_4, p. 320), o con preferenza per la coordinazione (è ricorrente, ad esempio, il connettivo esplicativo coordinante *cioè*). Talvolta, forse per ossequio al linguaggio matematico tradizionale, non mancano però subordinate implicite, specie al gerundio (si pensi allo stereotipato *sapendo che...* o a frasi come *Esaminando alcune figure geometriche, osserviamo che...*), ma anche con altre forme implicite del verbo (...*aventi un lato in comune*), forme passive (*gli angoli interni sono formati...*), usi peculiari del congiuntivo (*Sia B il lato...*) e casi di ricorso alla nominalizzazione.

Sul piano lessicale, pur con forti diversità fra libri di testo scolastici a seconda delle diverse sezioni, si evidenzia la dicotomia tra il tentativo di mantenere un lessico piano, non particolarmente ricercato e per quanto possibile accattivante, e il necessario ricorso a un bagaglio progressivamente crescente di termini tecnici tra loro interconnessi, così da sedimentarsi in modo sistematico nel patrimonio lessicale degli studenti. La terminologia può essere enfatizzata con espedienti grafici come il corsivo, l'evidenziazione in colore o il ricorso a box o glossari a margine. È inoltre significativo osservare la composizione qualitativa del lessico, che spesso vede coesistere, in porzioni testuali anche molto brevi, tecnicismi, parole dell'uso comune (o addirittura richiami al lettore), e parole e locuzioni sedimentate nello stile dei testi scolastici di matematica, ma talvolta lontane dal prevedibile repertorio linguistico di bambini e ragazzi; possono essere espressioni che alzano il registro (come *tali che* o *propriamente detti*), ma anche autentici tecnicismi collaterali (come *scambievolmente*, si veda la Fig. 2).

Disegniamo ancora un parallelogramma e tracciamo le due diagonali: osserviamo che si formano quattro triangoli, a due a due congruenti. Possiamo verificarlo misurandone i lati con un righello oppure sovrapponendoli dopo averli ritagliati. Quindi, $OA \cong OC$, $OB \cong OD$. Il punto O si chiama **centro** del parallelogramma.



►► Le diagonali di un parallelogramma si dividono scambievolmente a metà.

Fig. 2 – Un estratto dal libro 2_6, p. 260, in cui è presente l'avverbio *scambievolmente*.

Tutti questi aspetti contribuiscono ad aumentare la complessità linguistica del manuale di matematica e a rendere talvolta problematico l'approccio dello studente al testo senza il supporto dell'insegnante.

3.3 Gli aspetti multimodali del testo scolastico di matematica

La produzione di un testo scolastico coinvolge diverse figure (autori, redattori, grafici, illustratori ecc.) che cooperano fra loro al fine di costruire un testo la cui funzione principale è, come già ribadito, di esporre-spiegare concetti relativi alla disciplina coinvolta. Dato che ciascuna di queste figure evidenzia, seleziona, organizza i diversi aspetti secondo la propria concezione e professionalità, l'insieme delle figure professionali che lavorano a un testo scolastico diventa a tutti gli effetti *costruttore di significato* (Bezemer & Kress, 2010) del testo. Dunque, la maggiore o minore efficacia delle informazioni veicolate dipende anche dal livello di coerenza globale che questi costruttori di significato riescono a concretizzare nell'armonizzare fra loro aspetti testuali, grafici, di impaginazione ecc. Guardare a tutti questi aspetti insieme è un'operazione complessa, che coinvolge nel nostro caso certamente competenze matematiche, ma anche linguistiche e di interpretazione di scelte grafiche.

Da questo punto di vista, uno sguardo ai testi che tenga conto della dimensione multimodale può essere uno strumento efficace di indagine. L'approccio multimodale parte infatti dal presupposto che «i diversi mezzi di produzione del significato non sono separati ma appaiono quasi sempre insieme: l'immagine con la scrittura, la parola con il gesto, il simbolismo matematico con la scrittura, e così via» (Jewitt *et al.*, 2016, p. 2, traduzione degli autori).

Tale approccio si basa dunque su alcuni assunti:

- l'attribuzione di senso avviene attraverso diverse modalità o risorse semiotiche⁵, ciascuna delle quali offre differenti potenzialità e limiti;
- l'atto di attribuire significato coinvolge la produzione di insiemi multimodali, cioè di raggruppamenti di diverse modalità semiotiche nelle quali differenti tipi di produzioni di significato cooperano tra loro in modo integrato (Jewitt *et al.*, 2016, p. 3);
- se si vuole studiare il significato di qualcosa, occorre occuparsi di tutte le risorse semiotiche utilizzate per realizzarlo in senso globale.

In questo senso, anche la matematica può essere intesa come «un'impresa semiotica multimodale, il risultato dell'uso del linguaggio, della notazione simbolica e

5. Non tutti coloro che lavorano nella multimodalità usano il termine "modalità" per riferirsi, ad esempio, a sistemi di segni quali sono le lingue, le immagini, i gesti ecc.: alcuni preferiscono parlare di risorsa semiotica, e generalmente evitano di tracciare forti confini tra le diverse risorse, sottolineando invece il significato dell'insieme multimodale.

delle immagini matematiche per descrivere e prevedere modelli di spazio, numero, quantità e ordinamento» (O'Halloran, 2015, p. 73, traduzione degli autori).

L'analisi multimodale riguarda l'analisi della comunicazione in tutte le sue forme, ma si occupa in particolar modo di situazioni che coinvolgono l'interazione e l'integrazione di due o più risorse semiotiche, o modi, al fine di veicolare funzioni comunicative determinate (O'Halloran & Smith, 2012). In altre parole, essa si occupa principalmente di complessi multimodali nei quali le varie risorse semiotiche cooperano in senso forte alla determinazione dei significati del complesso multimodale stesso.

I metodi di indagine multimodale sono improntati all'analisi di tracce e segmenti osservabili (testi, video, audio ecc.), con l'intento di descrivere, trascrivere, annotare e analizzare i vari materiali a un livello micro, portando cioè l'attenzione a tutti i possibili dettagli che vanno a costituire il significato.

Recentemente, sono apparsi diversi studi che hanno messo in relazione le riflessioni interne alla didattica della matematica con il costrutto della multimodalità.

Dal lato della ricerca in didattica della matematica, diversi autori utilizzano il termine "multimodalità" per sottolineare «la coesistenza e l'importanza di diverse modalità o risorse nei processi di apprendimento e insegnamento: le parole (scritte o parlate), i simboli specifici della disciplina (come quelli dell'algebra), diagrammi e grafici, ma anche schizzi, gesti, posizioni del corpo, toni della voce e tutti quegli aspetti legati alla natura embodied della conoscenza» (Sabena *et al.*, 2016, p. 1). Alcuni di questi studi analizzano il ruolo di queste risorse caratterizzandole come elementi centrali del processo di insegnamento-apprendimento della matematica (tra gli altri, si vedano Nemirovsky & Ferrara, 2009; Radford *et al.*, 2009; Roth, 2009).

Dal lato della ricerca in ambito multimodale, fondandosi su studi precedenti (Halliday, 1978; 2004b), la multimodalità ha guardato ai problemi connessi all'apprendimento della matematica con l'auspicio di indagare l'impatto della natura multimodale della matematica all'interno del discorso pedagogico che avviene nelle classi (O'Halloran, 2015). Il discorso pedagogico non avviene tuttavia solo all'interno di dinamiche sociali coinvolgenti necessariamente sia l'insegnante sia gli studenti. Esistono dispositivi autonomi, utilizzati nella pratica didattica, pensati per veicolare contenuti e apprendimenti, anche matematici: i libri di testo. Bezemer e Kress (2010), comparando libri di testo di inglese, scienza e matematica degli anni '30, '80 e 2000, sottolineano come questi materiali abbiano subito profondi cambiamenti nell'organizzazione interna dei contenuti, nelle scelte riguardanti gli aspetti tipografici, scritti, di layout e di utilizzo delle immagini. Per i fruitori del testo, questi cambiamenti strutturali richiedono sia un'attenzione verso ciascuno dei *modi* che operano all'interno dei libri di testo, sia la capacità di districarsi in una lettura congiunta e globale di questi modi, siano essi testo scritto, immagini, aspetti tipografici o di layout (Bezemer & Kress, 2010).

Ora, il fatto che questi elementi (testo scritto, immagini ecc.) si trovino – anche nei libri di testo scolastici di matematica – intrecciati fra loro nel tentativo di costru-

ire significati alla portata del lettore induce a pensare che la modalità con la quale questi elementi vengono collegati fra loro necessita una certa attenzione.

3.3.1 Relazioni discorsive multimodali e conversione semiotica nei libri di testo di matematica

Molte teorie linguistiche hanno tentato di guardare ai testi identificando relazioni discorsive di varia natura fra unità del testo, e rappresentando la struttura del discorso di un testo. Tuttavia, la maggior parte di questi studi ha in passato focalizzato l'attenzione su testi non formattati, nei quali cioè viene indagato il testo puro, che non ha subito un processo di strutturazione e integrazione grafica (si considerino ad esempio Cohen, 1987; Grosz & Sidner, 1986; Longacre, 1983; Mann & Thompson, 1988; Moser & Moore, 1996; Polanyi, 1988; Van Dijk, 1972). Ma nell'era della multimodalità, il testo è raramente presentato nella sua purezza, anzi: tipicamente è solo parte di un dispositivo che contiene al suo interno altri elementi formattati insieme, in un tutto organico. Anche il libro di testo scolastico è scritto e presentato con la dovuta formattazione grafica; questo accade a maggior ragione con la matematica, e soprattutto con la geometria, che prevede inevitabilmente al suo interno, accanto a quella linguistica, anche una dimensione figurale e grafica caratteristica. Questa formattazione del testo aiuta solitamente gli autori a trasmettere il più possibile efficacemente il contenuto che si vuole trattare. Allo stesso tempo, la formattazione dovrebbe aiutare i lettori a cogliere la struttura del discorso e a comprendere le informazioni trasmesse.

Tentativi interessanti di integrazione tra le teorie linguistiche legate all'idea di relazione discorsiva all'interno di un testo e i tipi di testi con i quali siamo confrontati quotidianamente si ritrovano in alcuni lavori di Hovy (1998), Pascual (1993) e Bateman *et al.* (2001). Proprio quest'ultimo approccio si è rivelato particolarmente efficace nel nostro caso (ma non solo nel nostro: si veda ad esempio Sachan *et al.*, 2020), come ora andremo a mostrare.

Pur non riguardando in modo specifico manuali di matematica, Bateman (2008) ha intuito come i collegamenti fra i vari elementi interni a una pagina possano essere interpretati in termini di relazioni di tipo retorico, cioè di relazioni di varia natura (esemplificativa, concessiva, giustificativa, elaborativa ecc.) tra le parti di un testo, ampliate rispetto alla RST⁶ tradizionale (Mann & Thompson, 1988) in modo da poter essere applicate in contesti multimodali (Bateman, 2008; Bateman *et al.*, 2000).

6. La RST, *Rhetorical Structure Theory*, è una teoria relativa alla struttura dei testi, secondo cui «le strutture del testo sono gerarchiche, costruite su piccoli modelli chiamati schemi. Questi schemi, che compongono la gerarchia strutturale di un testo, descrivono le funzioni delle parti piuttosto che le loro caratteristiche di forma. Le relazioni tra le parti del testo [...] sono una parte importante del meccanismo definitorio della RST» (Mann & Thompson, 1988, p. 85, traduzione degli autori).

Bateman e Wildfeuer (2014) identificano infatti nella nozione di relazione discorsiva tra contenuti espressi con diverse modalità una colonna portante per la testualità dei testi multimodali. Così, se si considera una pagina di testo in cui sono presenti anche immagini (e video, nel caso di pagine digitali), si può analizzare la pagina andando a identificare tra le parti relazioni discorsive di esemplificazione, di concessione, di giustificazione, e così via. Trasferendo l'idea al caso dei testi scolastici di geometria, questo approccio può risultare interessante, ed è quello che abbiamo cercato di applicare in questo progetto di ricerca andando a integrare diversi quadri teorici derivanti da vari ambiti di studio. Infatti, se si prende in considerazione l'importante operazione cognitiva della *conversione semiotica* richiesta al discente (**par. 2.4**), l'atto di "invitare alla conversione" può essere inteso come una relazione discorsiva multimodale, presente all'interno del libro di testo, che connette due rappresentazioni dello stesso contenuto espresse in registri semiotici diversi. Ad esempio, una freccia che collega un'etichetta contenente la parola "vertice" – supportata eventualmente da una sua definizione – con il punto di incidenza di due lati di un poligono rappresentato a fianco è dal punto di vista cognitivo di Duval un invito alla *conversione* per il lettore. Nel quadro teorico utilizzato da Bateman si tratta invece di una *relazione discorsiva* interna alla famiglia delle relazioni riformulative parafrastiche (Rossari, 1994), cioè di quelle relazioni retoriche nelle quali si manifesta uno stesso significato in modi diversi⁷. I costrutti teorici non risultano dunque distanti l'uno dall'altro, ma solo orientati a prospettive diverse: una legata a processi cognitivi e una all'analisi testuale. All'interno di un libro di testo scolastico, queste relazioni retoriche si manifestano, ad esempio, attraverso la scelta di utilizzare diversi segni grafici che hanno la funzione di connettori, come frecce e colore, ma anche attraverso precise scelte di uso del colore o di organizzazione del layout di pagina e di disposizione dei contenuti al suo interno. Tali scelte fanno dunque riferimento all'uso di risorse e strategie semiotiche che manifestano una relazione discorsiva multimodale.

Ora, così come nel testo scritto «alcune parole codificano concetti e altre codificano procedure» (Wilson, 2011, p. 3, traduzione degli autori), trattando la multimodalità del testo matematico occorre distinguere due classi di segni: una che rappresenta enti e concetti matematici e una che riguarda segni che rimandano a significati procedurali esterni alla disciplina. I segni che appartengono alla prima classe hanno un referente che è un oggetto matematico, gli altri hanno un refe-

7. Nella famiglia delle relazioni riformulative può essere inserito anche l'invito al trattamento, inteso nell'ottica di Duval. A differenza dell'invito alla conversione, l'invito al trattamento consiste nel connettere fra loro due rappresentazioni dello stesso concetto matematico espresse in un unico registro semiotico. Ad esempio, l'espressione linguistica "in altre parole", indica l'intenzione di chiarire quanto già espresso nel registro della lingua naturale in un altro modo (**par. 2.4**).

rente che coinvolge un processo cognitivo del lettore. Ad esempio, in geometria una spezzata chiusa costituita da tre segmenti individua una parte di piano che rappresenta un triangolo: il referente è dunque un oggetto matematico; una freccia invece indica solitamente un verso di lettura, o una relazione di conseguenza tra quanto è presente a un suo estremo e quanto è presente dopo la punta della freccia, avendo così come referente un processo cognitivo del lettore. Al contrario degli oggetti matematici, questa strumentazione procedurale non sembra essere oggetto di specifica codifica disciplinare ma è prodotta attraverso un *savoir faire* editoriale non formalizzato.

Dunque, alcune scelte grafiche e di impostazione della pagina di tipo procedurale sono indicatrici di precise relazioni retoriche di tipo riformulativo, come vedremo dettagliatamente nel **paragrafo 5.5.2**; relazioni che, nell'intento dei costruttori di significato, invitano il lettore ad attivare quella particolare parte della comprensione matematica che è stata chiamata *conversione semiotica*. Tali scelte, tuttavia, possono facilitare il compito al lettore oppure ostacolarlo, perché a diversi utilizzi di una stessa risorsa corrisponde una minore o maggiore efficacia ai fini di un corretto invito alla conversione.

4.1 Selezione, costruzione e composizione del corpus

Il progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* si è focalizzato sull'analisi di parti scelte di libri di testo scolastici di matematica inerenti all'ambito geometrico. I testi del corpus sono destinati alla scuola primaria (SP) e alla scuola secondaria di primo grado (SSPG), elementare e media, secondo le denominazioni in uso nel Canton Ticino¹, e sono stati selezionati secondo criteri stabiliti a priori, esposti nei paragrafi successivi.

Argomento di analisi. A livello di selezione del contenuto, si è scelto di indagare il tema dei *poligoni* per diverse ragioni. In primo luogo, la trasposizione didattica di questo argomento risulta delicata: le ricerche evidenziano, infatti, numerose e varie difficoltà manifestate dagli allievi nei diversi livelli scolastici, alcune delle quali risultano profondamente legate proprio a determinati aspetti linguistici (Botta & Sbaragli, 2016; Martini & Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2020). In secondo luogo, si tratta di un tema che permea tutta la scuola dell'obbligo, in accordo con l'idea di percorso a spirale per la costruzione di competenze matematiche, in cui alcuni degli argomenti affrontati dagli allievi nei primi anni di scolarità vengono consolidati e approfonditi in diverse occasioni negli anni successivi. Questo aspetto ha reso possibile cogliere l'evoluzione delle scelte linguistiche al crescere della scolarità e le eventuali difficoltà a esse correlate. Si è infatti potuto attingere da un bacino di libri relativi a sette anni di scolarizzazione, dalla seconda scuola primaria alla terza scuola secondaria di primo grado.

Corpus del progetto. Il corpus raccolto nell'ambito del progetto (denominato corpus DFA-Italmatica) è un corpus specialistico dedicato allo studio della lingua dei testi scolastici di matematica², composto da 142 estratti di libri di testo di matematica per la scuola, suddivisi come indicato nella **Tabella 1**. È un corpus sincronico (i libri sono tutti recenti) e monolingue.

1. A differire rispetto all'Italia è anche la durata della scuola secondaria di primo grado, che in Canton Ticino è di quattro anni invece che di tre, mentre nel Canton Grigioni è la scuola primaria a durare sei anni anziché cinque. Va precisato che in Svizzera ogni Cantone è autonomo nella gestione delle scelte scolastiche; tuttavia, negli ultimi anni sono stati sviluppati dei piani di studio linguistico-regionali per la scuola dell'obbligo: i Cantoni della Svizzera francese hanno elaborato il *Plan d'études romand* (PER, www.plandetudes.ch), i Cantoni della Svizzera tedesca e plurilingui, tra i quali figura anche il Canton Grigioni, il *Lehrplan 21* (Piano di studio 21, <https://gr-i.lehrplan.ch/index.php>), e il Canton Ticino ha elaborato il *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (www.pianodistudio.ch).

2. Un'introduzione alla linguistica dei corpora e alle sue categorie si può trovare in Freddi (2014); più in generale sull'analisi automatica dei testi in una logica di tipo metrico si rimanda a Bolasco (2013).

Corpus DFA - Italmatica			II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG	Totale
	Corpus italiano		20	21	21	21	21	21	4	129
	Corpus svizzero	Sub-corpus ticinese	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG	Totale
			0	0	0	0	3	3	1	7
		Sub-corpus grigionese	II SP	III SP	IV SP	V SP	VI SP	I SSPG	II SSPG	Totale
			1	1	1	1	1	1	0	6
	Totale		21	22	22	22	25	25	5	142

Tab. 1 – Distribuzione per nazione e per anno scolastico del corpus DFA-Italmatica.

Criteri di scelta. I criteri scelti per definire tale corpus, illustrati qui di seguito, hanno tenuto in considerazione e incrociato vari elementi legati alle prassi scolastiche di adozione e d'uso, che sono state indagate prima di procedere alla raccolta dei testi, in modo che la selezione fosse adeguatamente rappresentativa.

Per quanto riguarda la situazione dell'Italia, nella scuola primaria le adozioni dei libri di testo variano nel passaggio dal triennio (I-III primaria) al biennio (IV-V primaria). In tale passaggio cambiano i titoli, ma soprattutto alcune caratteristiche, dei libri scelti; per questo motivo è stata mantenuta la seguente suddivisione all'interno del corpus: libri per la seconda e per la terza, e libri per la quarta e per la quinta. Questa organizzazione del corpus in sub-corpora (e la conseguente organizzazione e annotazione dei materiali) rende anche possibili analisi selettive, mirate rispetto agli anni scolastici. Nella scuola secondaria di primo grado viene, invece, solitamente mantenuta la stessa adozione in tutti e tre gli anni di scuola (quattro in contesto svizzero). Tenendo conto di questo aspetto e considerando quando viene trattato il tema poligoni, l'intero corpus DFA-Italmatica è stato internamente organizzato in tre sottogruppi (o sub-corpora):

- II e III primaria/elementare;
- IV e V primaria/elementare;
- I, II e III secondaria di primo grado/media³.

Per quanto riguarda il contesto italiano, a livello di individuazione delle opere da includere, i libri di testo sono stati scelti sulla base delle percentuali di adozione nel territorio nazionale italiano per l'anno scolastico 2017/2018⁴. Poiché da parte

3. Da ora in poi useremo la dicitura scuola primaria (SP) e scuola secondaria di primo grado (SSPG) indipendentemente dal corpus considerato.

4. Questi dati sono stati ottenuti a inizio progetto dall'Associazione Italiana Editori (AIE) nella fase di allestimento della raccolta.

dei docenti italiani non vi è l'abitudine, e in certi casi l'autorizzazione, a cambiare adozione di un testo fra un anno e l'altro, si è scelto di creare una graduatoria di titoli in base alle percentuali riferite al primo anno di ciascun sottogruppo, anno in cui solitamente viene fatta la scelta (ad esempio, il testo adottato in II per il sub-corpus II e III primaria). Inizialmente sono stati inclusi 30 titoli per ogni sottogruppo: i 20 più adottati e i 10 meno adottati. Tale scelta risponde all'esigenza del progetto di avere a disposizione per le analisi un'ampia panoramica di possibili scelte compositive, di stili e di caratteristiche disponibili nel mercato editoriale.

I libri più adottati sono stati in seguito catalogati attraverso l'attribuzione a ciascuno di un codice di identificazione univoco e portatore di informazione, composto da due numeri separati da un "_": il primo numero indica la posizione del titolo nella graduatoria delle adozioni; il secondo indica invece il grado scolastico corrispondente. Ad esempio, il terzo libro più adottato in IV primaria è stato codificato con il codice 3_4. I titoli meno adottati per ciascun sottogruppo sono stati codificati in modo leggermente diverso. Anche in questo caso, a ciascun libro è stato attribuito un codice di identificazione composto da due numeri separati da un "_", ma a questo codice è stata anteposta la lettera "c", abbreviazione di "coda"; inoltre, anche in questo caso il primo numero indica la posizione del titolo nella graduatoria delle adozioni, ma ordinata a partire dal meno adottato. In questo modo, il penultimo titolo in termini di adozioni in III primaria in Italia nell'anno scolastico 2017/2018 è stato codificato con il codice c2_3.

Dopo aver escluso testi ripetuti e titoli non più disponibili, si è arrivati ad un totale di 21 titoli per ogni sottogruppo: 17 fra i 20 più adottati e 4 fra i 10 meno adottati. Si precisa che sono stati eliminati solo i testi che risultavano esattamente uguali fra loro in tutte le parti (escluso titolo e copertina), ma non i testi che presentavano anche solo minime differenze. In questo senso, chiariamo che si sono verificati casi di versioni aggiornate di testi precedenti, nei quali una stessa casa editrice ha modificato, oltre che copertina e titolo, pochissimi elementi tra i contenuti. Se tali testi rientravano fra i 20 più adottati o fra i 10 meno adottati e quando erano disponibili in commercio, tali versioni sono state incluse nel corpus, perché il tener conto anche di minime differenze tra un'edizione e l'altra permette di avere ulteriori elementi per analizzare l'impatto sulla comprensione del testo che anche piccole modifiche linguistiche o grafiche potrebbero comportare.

A questo punto, dopo aver escluso i volumi in cui non era presente l'argomento *poligoni*, è stata composta la versione definitiva del corpus di libri italiani.

Il territorio svizzero di lingua italiana (Canton Ticino e Canton Grigioni italiano) presenta alcune differenze a livello di scelte d'uso dei libri di testo. In Canton Ticino non vi è una tradizione di adozione di libri di testo da parte dei docenti di scuola primaria, mentre, nella scuola secondaria di primo grado, la situazione è in parte diversa: si è scelto quindi di includere nel corpus tutti i libri ticinesi in lingua italiana

disponibili nel mercato destinati alla scuola secondaria di primo grado. A differenza del Canton Ticino, nel Canton Grigioni viene abitualmente utilizzato il libro di testo come supporto alla didattica: nel corpus sono dunque stati inseriti i libri promossi dall'Ufficio cantonale per la scuola popolare e lo sport.

Selezione dell'argomento, campionamento e criteri di annotazione. Per ogni libro di testo sono state selezionate le pagine con contenuti legati all'argomento *poligoni*, includendo nello specifico i seguenti temi:

- definizione ed elementi caratteristici dei poligoni;
- triangoli e classificazione;
- criteri di congruenza dei triangoli;
- quadrilateri e classificazione;
- simmetrie nei poligoni;
- grandezze legate ai poligoni: perimetro e area;
- poligoni regolari;
- poligoni inscritti;
- poligoni circoscritti.

A livello di analisi, l'omogeneità tematica fa sì che siano mitigati gli effetti dipendenti dal contenuto, che, se presenti, possono influire sulle misurazioni relative alla ricchezza e alla varietà lessicale. Ciò ha reso quindi possibile ricavare le peculiarità linguistico-testuali e matematiche in un campione testuale ricco ed esteso (e ben distribuito per classe scolastica d'interesse, dunque rappresentativo), ma, allo stesso tempo, anche adeguatamente omogeneo al suo interno. Quest'aspetto non è secondario a livello metodologico: infatti, quando si costruisce un corpus, va considerata una serie di variabili, che sono sì legate agli interessi della ricerca, ma anche determinanti per l'affidabilità del corpus stesso; è sufficiente, ad esempio, uno sbilanciamento interno perché i rilievi vengano falsati. Semplificando, per ricavare dati ed effettuare confronti fondati, è necessario ridurre al minimo effetti quali quello dell'autore (se un singolo testo dominasse sugli altri, ad esempio in termini di lunghezza, molte misurazioni sarebbero falsate) e, come si è visto, del tema (prendere estratti dedicati a temi matematici diversi è possibile, ma richiederebbe altre cautele). I sub-corpora per ogni classe possono quindi essere visti come dei macrotesti costruiti *ad hoc* da porzioni tratte da libri scolastici diversi⁵, così da rappresentare, per i vari livelli d'indagine dalla ricerca, il panorama nella manualistica scolastica d'interesse.

5. Tale metodo è corrente negli studi linguistici su corpora (ne è un esempio Ondelli e Nadalutti, 2017, in cui è anche spiegata la procedura di campionamento).

In base agli obiettivi di indagine, sono stati stabiliti criteri di annotazione finalizzati a cogliere ed estrarre in modo sistematico le diverse caratteristiche testuali in cui gli allievi si imbattono quando affrontano il macro-tema *poligoni*. Ciò con l'intenzione di analizzare il linguaggio speciale della matematica nelle diverse forme che assume nel testo scolastico: definizioni, descrizioni, esposizioni di proprietà, spiegazioni di procedure ecc. Questa scelta non è solo interessante perché permette di esplorare una pluralità di tipi e generi testuali attraverso i quali si esprime la matematica (e che coesistono nel testo scolastico, sebbene nell'insieme sia un testo dal fine espositivo), ma lo è anche in quanto è in sintonia con le più aggiornate indicazioni di didattica della lingua (e chiaramente accolte anche nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese, Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS, 2015)), che insistono sul far conoscere e sperimentare agli allievi diversi tipi testuali.

Dato che l'interesse dell'analisi è rivolto principalmente a indagare come il libro scolastico veicola un contenuto disciplinare e quanto la forma proposta permetta la comprensione di un dato concetto, non sono state prese in considerazione nell'analisi le parti di testo scolastico contenenti esercizi di vario tipo: di consolidamento, di verifica, riepilogativi ecc., che non erano finalizzate all'interesse di ricerca. Sono state dunque esaminate solo quelle porzioni di testo contenenti esercizi situate all'interno della parte teorica, che rappresentavano fasi salienti per la comprensione dei concetti in gioco; infatti, non di rado il testo scolastico alterna modalità illocutive e generi differenti, con consegne operative in cui si chiede all'allievo di risolvere alcuni brevi esercizi per portarlo a intuire qualche proprietà o enunciato.

Formato del corpus e difficoltà di annotazione. I volumi sono stati raccolti in forma cartacea e successivamente le parti d'interesse sono state scansionate in formato pdf (idoneo per la parte qualitativa del lavoro di annotazione, **par. 4.3.3**). Tuttavia, per rendere possibile l'annotazione in XML (base per le analisi quantitative, **par. 4.3.1**), e l'estrazione di dati lessicometrici e lessicali tramite strumenti dedicati (**par. 4.3.2**), le parti selezionate hanno dovuto essere trasformate in formato txt dapprima attraverso un software OCR di riconoscimento automatico, e in seguito controllate manualmente da due diverse collaboratrici⁶, sia per correggere eventuali errori, sia per affinare la trasposizione di alcuni elementi. Come sarà approfondito in seguito, in quest'operazione di trasformazione del corpus e nella successiva annotazione si è prestata la massima attenzione a mantenere, attraverso opportune codifiche, gli elementi caratterizzanti del linguaggio matematico che rischiavano di andare persi con la trasformazione in txt (in particolari elementi simbolici, notazionali e figurati).

6. Le due collaboratrici sono Giulia Canepa e Chiara Zuretti, che ringraziamo per il prezioso lavoro.

4.2 Le ragioni di un approccio misto *corpus based* e *corpus driven*

A prima vista, i testi scolastici sono testi ai quali tutti (docenti, allievi, editori) si è abituati e su cui potrebbe sembrare non ci sia più molto da dire: si tratta di un susseguirsi di capitoli e paragrafi che propongono in modo più o meno consueto dei contenuti altrettanto consueti. Invece, la mappatura dei testi del corpus attraverso l'individuazione degli elementi testuali e matematici caratterizzanti ha permesso di entrare profondamente all'interno della loro organizzazione, aprendo nuove e promettenti prospettive d'indagine. Studiare l'incidenza di certe modalità comunicative e di certi formati testuali tipici della matematica e vedere come questi disegnano la trama testuale d'insieme, esaminare singoli elementi d'interesse (un esempio tra i molti possibili: tutte le definizioni) e indagare le caratteristiche lessicali (specialistiche e non) significa infatti cercare di capire a fondo le caratteristiche del genere "testo scolastico di matematica", su cui molto c'è da osservare, e molto ci sarebbe da fare per renderlo uno strumento sempre più utile e aggiornato.

Le finalità di una simile operazione di ricerca possono quindi essere molte, sia sul piano teorico-descrittivo (per la matematica e per la linguistica), sia su quello didattico ed editoriale. Comprendere meglio come funzionano i testi, infatti, significa andare più a fondo nelle relazioni che intercorrono fra contenuto e forma, mettendo alla prova gli strumenti della linguistica testuale su un genere di testo che finora non è mai stato esaminato a fondo nella sua architettura e nei suoi modi comunicativi. Questo con il fine ideale di offrire elementi di riflessione per realizzare testi matematici più efficaci per l'apprendimento, basati su una migliore consapevolezza non solo disciplinare, ma anche linguistica e comunicativa, abbracciando la prospettiva di un'unitarietà di fondo della disciplina, del suo linguaggio e del modo di comunicarla.

Per ricavare le osservazioni e i risultati più convincenti dalle analisi del corpus, si è seguito un approccio ibrido *corpus based* e *corpus driven* (distinzione introdotta per la prima volta da Tognini-Bonelli, 2001). In parte i dati del corpus sono serviti per esplorare, validare o, eventualmente, confutare idee e ipotesi che già il gruppo di ricerca aveva a priori (*top-down*), ma, in altra parte, i dati stessi hanno fornito "dal basso" (*bottom-up*) materiale per costruire nuove idee e scoperte, non previste all'avvio dei lavori. I criteri stessi di annotazione per unità (cioè i macroatti e i microatti spiegati al **cap. 5**) sono il frutto *bottom-up* della lettura e dell'esame di dati non strutturati, cioè dei testi del corpus.

4.3 Metodi, criteri e strumenti per l'analisi testuale, lessicale, didattico-disciplinare

Per cogliere i diversi aspetti legati al linguaggio matematico utilizzato nei libri scolastici, ci si è serviti di diversi metodi, criteri e strumenti di analisi adatti a offrire uno sguardo globale sia sulle peculiarità prettamente linguistico-testuali sia su

quelle didattico-disciplinari. Nella scelta dei diversi aspetti più adatti alle analisi si è dovuto tenere presente che il linguaggio della matematica si realizza secondo specifiche caratteristiche e convenzioni, in una commistione di termini specialistici, formulazioni proprie della lingua comune, figure e grafici, espressioni simboliche ecc., che non di rado presentano variegate caratteristiche e potenziali criticità (**cap. 2**). Questa pluralità di codici e di formati ha reso complessi anche la gestione e il trattamento informatico dei dati, considerando la mancanza di strumenti già predisposti e in uso per questo tipo di testo. L'intento è infatti stato quello di perdere meno informazione possibile nel passaggio dai dati grezzi all'analisi di essi, che ha reso necessarie trasformazioni in formati diversi dall'originale (in particolare in txt, cioè in solo testo). Per le analisi, che hanno riguardato aspetti testuali, lessicali e didattico-disciplinari, sono stati individuati specifici metodi, criteri e strumenti, descritti nei prossimi paragrafi.

4.3.1 Metodi, criteri e strumenti per le analisi testuali

In questo paragrafo saranno illustrate le scelte effettuate e i trattamenti informatici messi in atto per svolgere l'annotazione globale del corpus (e la successiva estrazione mirata di informazione) a livello di unità compositive caratterizzanti. L'obiettivo complessivo è stato quello di annotare tutti i testi del corpus a livello di parti significative ricorrenti, che sono state individuate preliminarmente tenendo come riferimento il modello teorico della linguistica testuale sviluppato in contesto basilese (A. Ferrari, 2014, 2019; Ferrari, Lala & Zampese, 2021), adattandolo al testo scolastico di matematica. L'annotazione dei testi del corpus per unità gerarchiche (movimenti testuali, o macroatti, ed enunciati, o microatti, descritti ai **parr. 5.2** e **5.3**) è stata il frutto di un lungo lavoro a opera del gruppo di ricerca, che ha portato ad avere un quadro complessivo dell'organizzazione e dei tratti caratteristici del libro scolastico di matematica, in cui osservare e contestualizzare determinati fenomeni legati alla trasposizione dei contenuti e alla lingua, a vari livelli. L'uso del software UAM Corpus Tool (www.corpustool.com) per l'annotazione in formato XML e le successive estrazioni mirate hanno permesso di estrapolare importanti elementi informativi dai dati, cioè dai libri, che hanno offerto le basi per le analisi quantitative e qualitative.

Metodi. L'obiettivo dell'annotazione globale del corpus a livello testuale è stato quello di far emergere, segnalandola, l'articolazione di tutti i testi nelle loro unità e sottounità costitutive. Ciò per capire più in profondità il funzionamento del testo scolastico come atto comunicativo nei confronti degli allievi, considerando come si rivolge a loro, e in quale disposizione e relazione stanno le sue parti per proporre la costruzione del sapere.

Nei testi del corpus, convertiti come già anticipato da pdf in txt, si è proceduto con la marcatura in XML (*Extensible Markup Language*) delle varie unità tramite il tool di annotazione prima citato, che permette di selezionare porzioni di testo aggiungendo a esse metadati (cioè attributi aggiuntivi sui dati), seguendo i passaggi sintetizzati in **Figura 1**:

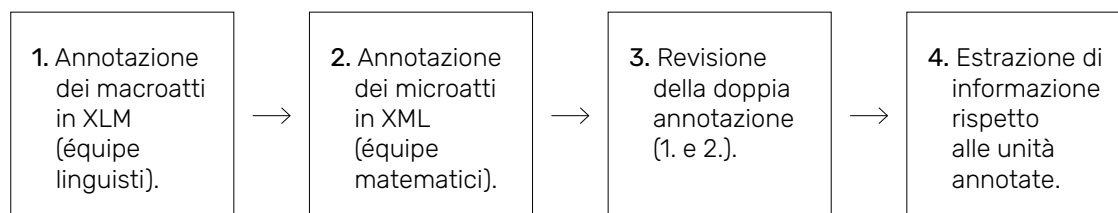


Fig. 1 – Sintesi delle fasi principali della progressione dei lavori di annotazione ed estrazione delle informazioni.

Per individuare nel concreto dei testi le unità da annotare, è stato necessario, prima di tutto, determinare criteri per riconoscerle che fossero condivisi da parte di tutto il team di progetto. Inoltre, il passaggio dalla conoscenza teorica delle caratteristiche formali e funzionali delle diverse unità da ricercare nei testi alla loro individuazione nel concreto del corpus, ha portato più volte alla necessità di ridefinirle e a raffinarle, anche perché collegate al doppio sguardo disciplinare. Ciò ha permesso, dopo un lungo percorso di definizione, da un lato di applicare una solida impostazione per l’annotazione e, dall’altro, di non averne una visione rigida, bensì flessibile; questo lavoro si è rivelato molto proficuo per avviare una riflessione profonda e innovativa su come è costruito e su come comunica il libro scolastico in generale, di matematica in particolare.

Criteri. Per il modello di analisi testuale elaborato in contesto basilese, al di sotto di capitoli e paragrafi, un testo è articolato in *movimenti testuali*, *enunciati* e *unità informative*. L’enunciato è l’unità di riferimento della composizione del testo: più enunciati formano un movimento testuale (che spesso, semplificando, coincide con la dimensione del capoverso), mentre, all’interno, l’enunciato può articolarsi in unità informative variamente legate e disposte l’una rispetto all’altra (ad esempio possono esserci degli incisi). Di questi tre livelli di unità, l’annotazione sistematica in XML è stata fatta dall’équipe di linguistica a livello di movimenti testuali (anche chiamati macroatti) e da quella matematica a livello di enunciati (o microatti); per un approfondimento sulle scelte di annotazione a questi livelli si veda il **capitolo 5**.

Pur nella conservazione degli elementi basilari del modello, le caratteristiche del testo matematico per la scuola hanno richiesto piccoli adeguamenti delle cate-

gorie e alcune integrazioni necessarie per cogliere appieno i tratti salienti della trasposizione manualistica della disciplina: in particolare, per citare un'aggiunta importante, è stata attribuita una caratterizzazione matematica agli enunciati o microatti (distinti in *definizione*, *proposizione*, *denominazione*, *esemplificazione*, *notazione*). Per arrivare a queste categorie – in parte a priori sulla base della letteratura, in parte raffinate alla luce dei testi corpus –, si sono fatti numerosi tentativi di annotazione, al fine di verificarne l'efficienza (cioè l'eshaustività e la non ridondanza); inoltre, si è tenuto conto degli elementi che si sarebbero in seguito voluti estrarre e approfondire.

La caratterizzazione semantica (matematica) degli enunciati ha fatto sì che un enunciato matematico potesse essere formato, ad esempio, anche da due enunciati in senso strettamente linguistico (cioè da due frasi separate da pausa forte), ma inscindibili dal punto di vista concettuale e contenutistico. È inoltre stato necessario conservare traccia, annotandola con un'etichetta specifica, della presenza di figure associate ai vari microatti, i quali possono dunque presentare (o meno) una marcatura di questo elemento.

Strumenti. Il contenuto testuale del corpus (txt) è stato estratto tramite un processo di *Optical Character Recognition* (OCR) effettuato con l'applicativo proprietario ABBYY Fine Reader. Questo applicativo è stato selezionato in virtù delle sue prestazioni nettamente superiori rispetto a Tesseract, l'alternativa standard offerta dal mondo open source.

Tale contenuto testuale è stato poi importato nell'applicativo prima citato UAM Corpus Tool: uno strumento sperimentale realizzato da Mick O'Donnell per facilitare l'annotazione di documenti testuali. Tramite UAM Corpus Tool, il gruppo di ricerca ha potuto annotare il corpus identificando le tipologie di macroatti e microatti ed evidenziando altre informazioni di interesse come le relazioni con le figure.

Una volta completata la fase di annotazione manuale, sono stati sviluppati degli applicativi software ad hoc per l'elaborazione automatica delle annotazioni. Per ogni libro di testo annotato è stato prodotto un report in forma testuale che contiene i seguenti elementi:

- il testo originale annotato con l'indicazione dei tipi di macroatti e microatti associati a ogni segmento di testo;
- il numero di macroatti e microatti per tipo;
- il numero di relazioni con le figure;
- il numero di parole grafiche;
- il numero di parole grafiche per macroatto e microatto;
- la media di parole grafiche per macroatto e microatto;
- la lista dei (tipi di) macroatti nell'ordine in cui compaiono nei libri di testo.

A partire da questi report associati a ogni libro, si sono potute effettuare altre elaborazioni i cui risultati sono contenuti in report specifici:

- un report per ogni anno di scolarità dedicato al macroatto *logico-argomentativo* contenente l'elenco delle parti testuali annotate;
- un report per ogni anno di scolarità dedicato a ciascuno dei microatti *definizione, esemplificazione, proposizione* contenente l'elenco delle parti testuali annotate;
- un report per ogni anno di scolarità contenente le parti testuali annotate come *relazione con figura*.

A partire da tutti i report ottenuti, sono state elaborate delle tabelle riassuntive (rese fruibili come fogli di calcolo Excel) contenenti vari dati:

- una tabella riassuntiva della distribuzione dei macroatti negli anni di scolarità;
- una tabella riassuntiva della distribuzione dei microatti negli anni di scolarità;
- una tabella riassuntiva della distribuzione dei microatti all'interno del macroatto *logico-argomentativo* negli anni di scolarità;
- una lista delle sequenze di macroatti per ogni libro di testo annotato.

Come già descritto, le annotazioni create mediante UAM Corpus Tool sono state esportate nel formato XML. Le informazioni contenute nei file XML sono poi state elaborate tramite dei noti strumenti di Trattamento Automatico del Linguaggio (TAL, o, più comunemente, NLP, acronimo di *Natural Language Processing*). Nel dettaglio, è stato utilizzato un *tokenizzatore* per scorporare il testo annotato nelle singole parole grafiche (cioè graficamente distinte) che lo compongono, al fine di poter calcolare tutte le statistiche di interesse a livello di singola parola grafica. Inoltre, sono state utilizzate delle espressioni regolari (Friedl, 2006) create ad hoc per riconoscere tutti i pattern testuali di interesse per le analisi sopracitate. Le espressioni regolari, comunemente chiamate *regex*, sono sequenze di caratteri che rispondono a una serie di convenzioni finalizzate alla codifica di modelli di ricerca (*search pattern*). Tutte queste elaborazioni sono state effettuate con l'ausilio del linguaggio di programmazione Python, che rappresenta la scelta più comune per applicazioni di TAL.

4.3.2 Metodi, criteri e strumenti per le analisi lessicali e morfosintattiche

Come vedremo in questo paragrafo e poi in particolare nel **capitolo 7**, gli scopi che hanno guidato l'esplorazione del corpus DFA-Italmatica dal punto di vista del lessico e, in misura minore, della morfosintassi, sono molteplici. In partico-

lare, non si è voluto solo dare una descrizione globale del vocabolario del corpus di libri di testo (tokenizzato e lemmatizzato), ma anche e soprattutto sostenere con i dati alcune caratteristiche peculiari dei materiali in esame e indagarne elementi specifici (singole parole, tipicità lessicali di determinati microatti, impatto del lessico tecnico-specialistico nelle varie classi ecc.), sempre con l'obiettivo di ricavare informazioni utili per capire meglio l'input testuale con cui sono confrontati i giovani lettori. L'esame del lessico e degli aspetti morfosintattici è anche orientato alla volontà di indagare e misurare la leggibilità dei testi scolastici: dimensione discussa da decenni, per la quale sono stati elaborati alcuni indici in costante evoluzione.

Metodi. Realizzare analisi lessicali e ricavare misure lessicometriche da un corpus significa estrarre da esso informazioni statistiche e qualitative rispetto alle parole presenti. Per prima cosa, va quindi considerato che si ha a che fare con un concetto delicato e dibattuto in vari ambiti del sapere (dalla filosofia alla linguistica alla lessicografia): quello di "parola" (De Mauro, 2005), che può essere considerato secondo diverse dimensioni, le quali incidono sul trattamento computazionale dei dati linguistici. Ad esempio, la "parola grafica" (idealmente una sequenza di caratteri separata dalle altre da uno spazio bianco) risponde a una concezione non del tutto esaustiva di "parola", che viene messa in crisi se si pensa a casi come le polirematiche (come *asse di simmetria*), in cui più elementi cooperano a costruire un'unità di significato, o i verbi contenenti particelle pronominali, che, di fatto, sono parole nelle parole (*contiamoli*, *diamoglielo* ecc.). Considerando questa complessità, si è cercato di stabilire, mantenere e dichiarare una chiarezza metodologica che permetta di comprendere, nelle varie analisi, quali aspetti vengono considerati e come.

Le indagini lessicali sul corpus hanno previsto alcuni rilievi standard e altri mirati al tipo di testo in esame, quindi specifici del testo matematico. Le principali grandezze rilevate nelle analisi lessicali sono state, dunque, la dimensione del corpus (totale occorrenze) – cioè il numero complessivo delle occorrenze delle forme grafiche del corpus (*word token*), includendo nel conteggio anche le parole ripetute – e l'ampiezza del lessico, cioè il totale dei lemmi (*word type*) che si presentano almeno una volta all'interno del corpus. Per quanto concerne tali misure generali, occorre considerare la diversità delle dimensioni dei sub-corpora (**cap. 7**). Contestualmente alle dimensioni, si sono ricavati elementi descrittivi anche rispetto alla qualità del lessico (quali sono le parole più frequenti nel corpus e nei sub-corpora), nonché misurazioni significative dal punto di vista dell'apprendente: in particolare la ricchezza (o estensione: il rapporto tra l'ampiezza e la dimensione del corpus) e la densità lessicali, cioè la varietà del lessico e il rapporto fra parole piene, portatrici di significato, e totale delle parole di un corpus, comprese le parole funzionali o grammaticali, come articoli, preposizioni, connettivi.

Per completezza di ricerca sull'oggetto di studio è poi stato importante soffermarsi sulle specificità disciplinari del lessico dei libri di testo, compiendo ricerche mirate non solo sulla presenza di parole del Vocabolario di Base (le circa 7'000 parole largamente presenti in ogni tipo di testo e comprese dalla maggior parte di coloro che parlano italiano), ma anche sull'impatto quantitativo del lessico specialistico (con annesse considerazioni rispetto ai tipi di parole). Inoltre, sono state condotte indagini specifiche su alcune parole ricorrenti nella manualistica, ma insidiose didatticamente e su un tipo di categoria grammaticale particolarmente significativa: i connettivi. Come si vedrà nei capitoli dedicati, le indagini lessicali e morfosintattiche (legate alla leggibilità) hanno coinvolto l'intero corpus o porzioni di interesse specifico come le *definizioni*.

Criteri. Per perseguire gli obiettivi di analisi, dopo una prima fase di pulizia e normalizzazione leggera del corpus, finalizzata a renderlo analizzabile in modo automatico dai diversi strumenti, si è proceduto con la ricognizione dei software disponibili e con alcune prove di funzionamento e di estrazione dei risultati su piccole parti di corpus. Ciò ha permesso di individuare gli strumenti più idonei (presentati alla voce *Strumenti*), per le diverse analisi da portare avanti, scegliendo di abbinare l'uso di più software di analisi per ottenere le informazioni desiderate, che potremmo così sintetizzare (alcune globali sul corpus, altre specifiche):

- Misurazione della leggibilità dei sub-corpora di testi per le diverse classi secondo l'indice *Gulpease*, la cui formula, elaborata appositamente per l'italiano in Lucisano e Piemontese (1988) e Piemontese (1996), è la seguente:

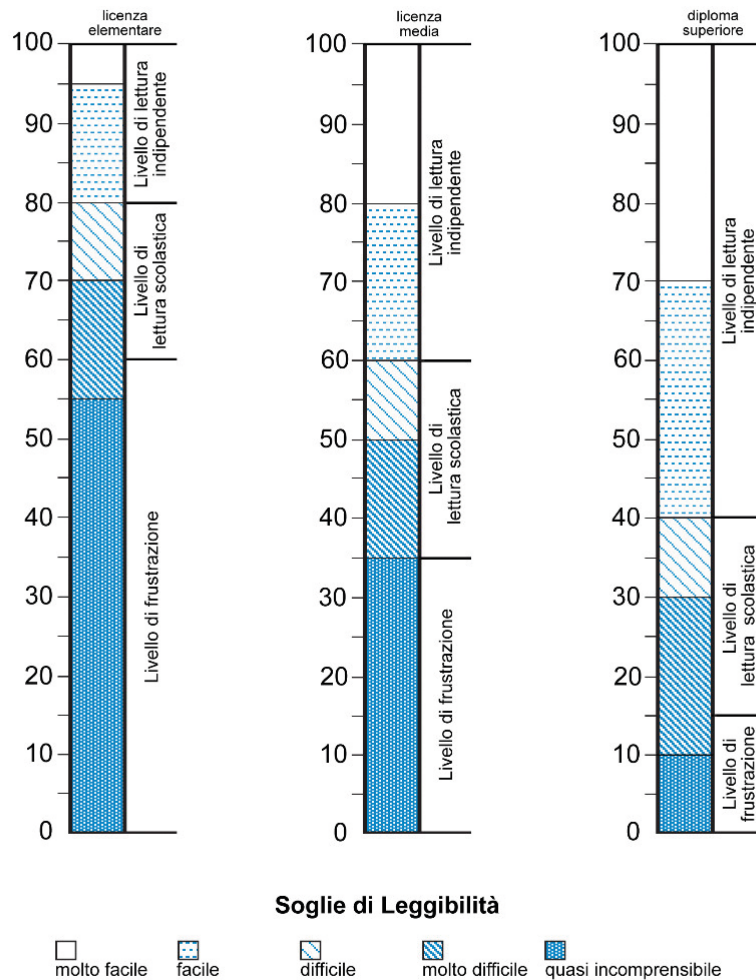
$$\text{Facilità di lettura} = 89 - \text{LP}/10 + \text{FR} * 3$$

$$\text{LP} = \text{lettere} * 100 / \text{totale parole}$$

$$\text{FR} = \text{frasi} * 100 / \text{totale parole}$$

La leggibilità di un testo è una dimensione in cui viene considerata la lunghezza media delle parole e delle frasi; la difficoltà del testo non rappresenta, però, un valore assoluto, ma da rapportare al livello di scolarità di chi lo legge, come mostrato in **Figura 2**.

Indice Gulpease: scala dei valori



Elaborazione da:
Maria Emanuela Piemontese, "Capire e farsi capire. Teorie e tecniche della scrittura controllata", Tecnodid, Napoli 1996, p. 102

Fig. 2 – Soglie di leggibilità rispetto all'indice *Gulpease* a seconda del livello di scolarità dei lettori tratte da www.corrige.it/leggibilita/indice-gulpease.

- Presenza di lemmi del Vocabolario di Base e incidenza del lessico tecnico-specialistico.
- Quantificazione e descrizione globale del lessico del corpus, e confronti fra i vari sub-corpora (lemmatizzazione e *tagging* per parti del discorso, per misurare la densità lessicale e osservare la distribuzione quantitativa delle diverse categorie grammaticali; lista dei lemmi più frequenti; numeri di *token*,

occorrenze, e *type*⁷, lemmi; TTR, *Type-Token Ratio*, per misurare la ricchezza lessicale).

- Ricerca di parole di particolare interesse, per osservarne l'impatto quantitativo e la collocazione (si pensi ad esempio a particolari connettivi, o a parole e locuzioni insidiose e discutibili nella didattica della matematica, come, per citare un caso, *non poligono*); per questi scopi si è proceduto con l'analisi delle concordanze, cioè con l'estrazione delle liste delle occorrenze di una parola nel corpus, ciascuna presentata nel suo contesto linguistico.

Strumenti. Per elaborare le analisi sopra elencate, si sono considerati, testati e usati i seguenti strumenti, per lo più disponibili o scaricabili online (all'indirizzo indicato fra tonde)⁸:

- AntConc (www.laurenceanthony.net/software.html): concordanze (lista delle occorrenze di una parola nei testi, ciascuna presentata nel suo contesto linguistico);
- Corrige.it (www.corrige.it): resoconti di leggibilità basati sull'indice *Gulpease*, ricchezza lessicale, descrizione del vocabolario con distinzioni secondo le marche d'uso del GRADIT, il *Grande dizionario italiano dell'uso*, di Tullio De Mauro (1999) – in particolare, rilievi sulle parole FO, fondamentali, AD, di alta disponibilità, e AU, di alto uso, appartenenti al Vocabolario di Base –, individuazione di periodi sintatticamente complessi;
- READ-IT (DyLan TextTools v2.1.9, www.ilc.cnr.it/dylanlab/apps/texttools/?tt_user=guest): resoconti di leggibilità, annotazione per Part of Speech (parti del discorso) e conseguente densità lessicale, annotazione morfosintattica e *parsing*⁹ sintattico; questo strumento (Dell'Orletta *et al.*, 2011) considera, insieme, più elementi del profilo linguistico dei testi (lessico e morfosintassi), re-

7. Con *word type* (o *lemmi*) si intendono le parole diverse tra loro, mentre con *word token* (o *occorrenze*) tutte le forme grafiche che effettivamente compaiono ("mangiare" è un lemma, ma se in un testo ci sono, ad esempio, sia "mangerò" sia "mangiavano", questi conteranno come due occorrenze). Ad esempio, la frase "Gli angoli formati da un lato e dal prolungamento del lato consecutivo si dicono angoli esterni" (tratta da un volume per la scuola secondaria di primo grado) è composta da 16 *token* (tutte le parole), ma da 14 *type* (cioè i lemmi, perché "angolo" e "lato" compaiono due volte, flessi). Poiché la misura della ricchezza lessicale è il risultato di *types/tokens* (14/16), ne deriva un indice pari a 0,87; se si considera che un indice di densità lessicale superiore a 0,5 non è tipico del linguaggio quotidiano, dove normalmente si aggira intorno a 0,3-0,4, si può iniziare a quantificare oggettivamente la difficoltà cui il lettore è sottoposto, data dall'alta varietà lessicale in una porzione testuale breve.

8. Solo T-LAB è un tool a pagamento, mentre Corrige.it e Sketch Engine lo sono solo nelle versioni avanzate, che permettono di elaborare una mole maggiore di dati.

9. *Parsing* significa "segmentare": in campo sintattico, tale operazione consiste nel cercare di associare a ogni frase una struttura.

stituendo misurazioni di leggibilità avanzate, che superano i parametri considerati dall'indice *Gulpease* (che tiene conto solamente della lunghezza delle parole e delle frasi);

- Sketch Engine (www.sketchengine.eu): lemmatizzazione con elaborazione di liste di frequenza, concordanze;
- TaLTaC^{2.10} (www.taltac.com): lemmatizzazione (con associazione di una lista di *multiword* (polirematiche) matematiche, come *angolo alla base* e *asse di simmetria*) con elaborazione di liste di frequenza, misure lessicometriche;
- T-LAB (www.tlab.it/?lang=it): lemmatizzazione, misure lessicometriche, analisi tematiche e associazioni di parole;
- TreeTagger (www.cis.uni-muenchen.de/~schmid/tools/TreeTagger/): lemmatizzazione e annotazione per *Part of Speech* (parti del discorso).

Dei vari strumenti è stata data una sintesi non dell'insieme delle funzionalità, ma di quelle usate nell'ambito delle nostre analisi (per le quali spesso è stato anche usato più di uno strumento). Alcuni strumenti lavorano con file di formato diverso, ma, nel nostro caso, tutti i dati in input sono stati immessi in formato txt (a seconda delle esigenze o l'intero corpus o singole parti: ad esempio tutte le definizioni o altri enunciati, estratti in modo selettivo).

4.3.3 Metodi, criteri e strumenti per l'analisi didattico-disciplinare

In questo paragrafo vengono presentate le scelte effettuate per analizzare il corpus dal punto di vista didattico-disciplinare, tenendo sempre in considerazione anche gli aspetti linguistici. Tale analisi è rivolta a far emergere gli aspetti di criticità del corpus considerato nel suo complesso (linguaggio verbale, linguaggio simbolico o figurale, distribuzione e coerenza dell'informazione nel suo insieme), che possono rappresentare presumibilmente fonte di difficoltà nella comprensione dei concetti matematici da parte degli allievi. I risultati puntuali ottenuti da tale analisi sono descritti nel **capitolo 8**.

Metodi. Al fine di condurre un'analisi completa e puntuale è stata costruita una griglia, partendo dall'osservazione di un campione di testi, così da riuscire a categorizzare le caratteristiche principali e salienti del corpus. Ciò è in linea con quanto suggerito in Charmaz (1995) e ripreso in Milesi e Catellani (2002), che consigliano di definire le categorie di analisi sulla base di una prima lettura e osservazione di un campione dei testi del corpus. Per la costruzione di tale griglia di codifica, si è proceduto in modo ciclico e ricorsivo come spesso accade in analisi strutturate con software dedicati. Alla luce di ciò che è emerso da una prima applicazione di queste categorie, completata anche da elementi emersi dalla letteratura sul tema,

si è tornati a una fase di ridefinizione delle categorie stesse. In seguito, si è effettuata un'ulteriore applicazione delle categorie su testi campione così da validare o meno la griglia costruita, in un processo ricorsivo che è proseguito fino a quando si è ottenuto un sistema di categorie che ha permesso di "catturare" in modo soddisfacente gli aspetti che ci eravamo prefissati di evidenziare. La procedura adottata è dunque di tipo top-down (dall'alto verso il basso), per cui si parte da categorie di analisi preesistenti e si cercano citazioni corrispondenti nei testi (Milesi & Catellani, 2002).

Criteri. L'ottica utilizzata per individuare le categorie di analisi è stata duplice: da una parte sono stati evidenziati quegli elementi che costituivano criticità sul piano disciplinare (da noi chiamato "Punto di vista matematico"): errori o imprecisioni concettuali, utilizzo di termini matematicamente scorretti, rappresentazioni errate di un oggetto matematico ecc.; dall'altra quegli aspetti che, pur essendo matematicamente corretti, risultano delicati dal punto di vista didattico, potendo così risultare inadatti e forvianti per la comprensione del concetto da parte dell'allievo ("Punto di vista didattico").

Allo stesso tempo l'analisi è stata rivolta agli aspetti semantici degli oggetti matematici, di tipo concettuale ("Elementi concettuali") e linguistico ("Elementi linguistici"), e a quelli semiotici concernenti in particolare gli aspetti grafico-figurali. Il focus, dunque, non è solo strettamente disciplinare, legato al contenuto matematico proposto, bensì anche didattico, in quanto l'analisi è volta a indagare come la lingua, le rappresentazioni figurali, gli aspetti multimodali possano in alcuni casi interferire con la corretta comprensione da parte dell'allievo piuttosto che facilitarla (Canducci, Rocci & Sbaragli, 2021). Va ricordato che l'argomento selezionato nei libri di testo riguarda i *poligoni*, tema per cui vi è in tutti i livelli scolastici una forte presenza di elementi grafico-figurali, con funzioni e caratteristiche diverse. Tali aspetti possono poi risultare più o meno coerenti rispetto alle rappresentazioni linguistiche dei concetti in gioco (Canducci, Demartini & Sbaragli, 2021).

Queste considerazioni e le caratteristiche delle analisi che ci siamo prefissati di condurre hanno portato a dover considerare le pagine del corpus nella loro interezza e nella pluralità di rappresentazioni, non concentrandosi solo sugli estratti di testo. Ne è dunque scaturita la seguente classificazione, dalla quale si è partiti per l'analisi:

	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico
Elementi concettuali		
Elementi linguistici		
Elementi grafico-figurali		

Tab. 2 – Griglia degli aspetti didattico-disciplinari rilevati nei libri di testo.

Per ognuna di queste categorie sono stati individuati alcuni fenomeni ricorsivi nei libri di testo in tutti i livelli scolastici che hanno rappresentato le sottocategorie di analisi per la codifica dei testi che sarà approfondita nel **capitolo 8**.

Strumenti. Il software scelto per questo tipo di analisi è Atlas.ti versione 8¹⁰, un programma ricco di funzionalità che sono state utilizzate solo in parte in questo progetto di ricerca (cosa che dipende dal fatto che il software non è specifico per analisi linguistiche, ma permette in ogni caso un pratico sistema di annotazione e di consultazione).

La scelta è ricaduta su questo software in quanto di facile utilizzo nel trattare file non di testo (nel nostro caso pdf) che presuppongono una selezione di una qualsiasi parte di essi. Atlas.ti permette di importare all'interno di uno spazio specifico, detto "progetto", i vari file pdf che sono stati ottenuti dalla scansione delle pagine dei libri di testo del corpus.

Un altro fattore che ha determinato la scelta è l'immediatezza dell'interfaccia, particolarmente user-friendly, che permette di annotare facilmente i fenomeni osservati, essendo vicina al modo in cui concretamente si procede per effettuare un'analisi qualitativa di testi, esattamente come un ricercatore potrebbe fare con carta e penna.

Inoltre, l'alto numero di pagine da codificare obbligava a una gestione snella dell'etichettatura e a una immediata archiviazione e recupero delle informazioni evidenziate.

Operativamente, nella nostra ricerca, è stato creato un progetto per l'analisi dei testi di II-III primaria, uno per IV-V primaria e uno per i libri della scuola secondaria di primo grado. I materiali del Canton Ticino e del Canton Grigioni sono stati analizzati a parte. Questa suddivisione è giustificata da una possibile analisi settoriale, livello per livello, in modo da ottenere dati quantitativi differenti utili per un successivo confronto.

Il nome dei file è stato costruito indicando nell'ordine la sigla utilizzata per identificare il libro nell'elenco del corpus (**par. 4.1**), casa editrice, anno di pubblicazione, titolo, pagine scansionate.

Una volta creata l'unità di lavoro e importati i documenti da analizzare, la schermata di Atlas.ti si presenta divisa in due colonne: a destra compare la pagina (o le due pagine) del testo e a sinistra c'è la colonna in cui sono riportati tutti i file da analizzare e l'elenco dei codici (*codes*) della griglia riportati in Atlas.ti (**Fig. 3** e **Fig. 4**).

¹⁰. Per un approfondimento sull'utilizzo di Atlas.ti versione 8 rimandiamo al manuale (Frieze, 2020), inoltre per un esempio di analisi testuale con questo software si consiglia Vardanega (2008) e Giuliano e La Rocca (2008).

La procedura di base di codifica consiste nel selezionare con il mouse una porzione grande a piacere della pagina ritenuta importante (*quotation*) e nell'associarvi uno o più codici precedentemente definiti.

Se lo si ritiene utile e opportuno ogni associazione può essere corredata da un commento (*memo*) che permette in fase di codifica di annotare una breve giustificazione del codice assegnato o un'annotazione utile nell'estrazione dei risultati.

Terminata la codifica, sono state effettuate ricerche di combinazioni di codici all'interno di tutti i documenti dell'unità di lavoro, utilizzando la finestra *query tool* (Fig. 5). Questo strumento di ricerca lavora con operandi rappresentati dai codici o da funzioni che collegano due codici tra loro. Gli operatori definiscono le condizioni che devono essere soddisfatte perché un segmento di testo venga estratto. Tra le classi di operatori messe a disposizione da Atlas.ti, quella utilizzata nel nostro caso è la classe di operatori logici, ossia i classici booleani: OR estrae le parti di libro associate ad almeno uno dei due codici indicati; XOR estrae le parti di libro associate solo a uno dei due codici indicati; AND estrae le parti di libro associate a entrambi i codici indicati; NOT definisce una condizione che deve essere assente.

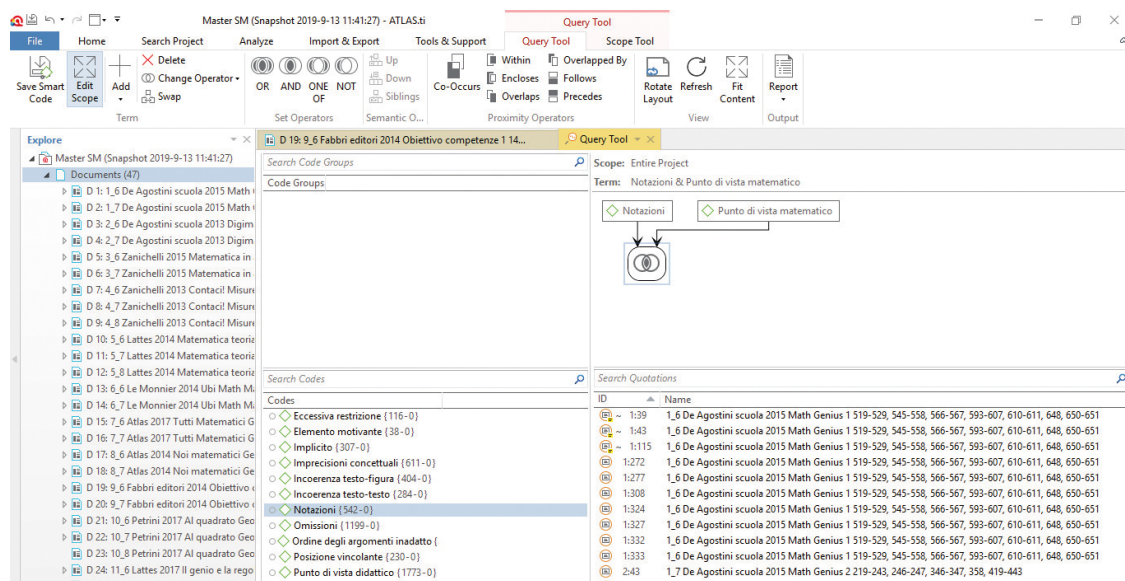


Fig. 5 – Finestra *query tool* per la ricerca di combinazioni di codici.

Una volta applicato l'operatore, una piccola schermata in basso a destra mostra l'elenco delle selezioni del testo che soddisfano i requisiti richiesti. È anche possibile richiedere che l'output restituito sia visualizzato in un file dove si riportano una dopo l'altra le citazioni associate al (ai) codice (codici) selezionato (selezionati),

mostrando per ciascuna il documento da cui è stato estratto, le coordinate che lo identificano nel testo, gli altri codici a cui essa eventualmente è stata associata e il commento eventualmente lasciato (Fig. 6).

Project: Master SM (Snapshot 2019-9-13 11:41:27)

Report created by etserno on 03.09.2021

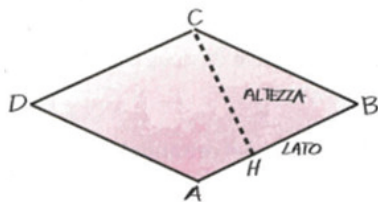
Report for Query: Aspetti figurali & Punto di vista matematico

(86) quotations

1:176 1_6 De Agostini scuola 2015 Math Genius 1 519-529, 545-558, 566-567, 593-607, 610-611, 648, 650-651 (27:179:124-27:362:224) - D 1: 1_6 De Agostini scuola 2015 Math Genius 1 519-529, 545-558, 566-567, 593-607, 610-611, 648, 650-651

Created by elena.franchini on 08.02.2019, modified by elena.franchini on 08.02.2019

Content



Comment: by elena.franchini

| la rappresentazione dell'altezza è sbagliata

2 Codes:

☐ Aspetti figurali / ☐ Punto di vista matematico

0 Memos

0 Hyperlinks

3:154 2_6 De Agostini scuola 2013 Digimat+ Geometria 1 169-177,199-

Fig. 6 – Esempio di report.

Questo permette di avere in un unico documento tutte le informazioni utili e di continuare l'analisi studiando i singoli casi, se necessario.

5.1 L'architettura del testo: le sue unità (forme e funzioni)

Il nostro modello di articolazione testuale dei libri scolastici di matematica è stato concepito con il fine di capire come questi “parlano” ai lettori, cioè quali scelte sono a essi sottese a livello di intenzioni comunicative e di organizzazione del sapere in gioco. Il quadro teorico di riferimento è quello della linguistica del testo proposto da A. Ferrari (2014; 2019) e Ferrari, Lala e Zampese (2021), adattato allo specifico del testo matematico per la scuola (si veda Demartini, Sbaragli & Ferrari, 2020). Tale testo si può intendere, al pari di ogni testo, come «un'unità semantica unitaria, continua e progressiva» (Ferrari, Lala & Zampese, 2021, p. 13)¹, però presenta tratti assolutamente peculiari, strettamente connessi alla disciplina che veicola e al suo linguaggio. Vediamo dunque di porre in dialogo le prospettive fornendo una visione unificante dell'architettura base del testo, utile per situare in un quadro comune le indagini specifiche.

A livello strutturale, gli studi di linguistica del testo individuano nell'enunciato² l'unità-base del testo: un'unità caratterizzata da una funzione comunicativa (far sapere, far fare ecc., che spesso si trasferisce alle unità testuali superiori che includono l'enunciato stesso) e da una funzione di composizione testuale (tematizzare, motivare, specificare, riformulare ecc.). Al di sopra degli enunciati vi è il movimento testuale, che è il risultato di un macroatto di composizione testuale ed è costituito tipicamente da una sequenza di enunciati, che forma un tutto unitario. Sempre tipicamente, esso è caratterizzato da un enunciato principale, seguito o preceduto da enunciati subalterni, che lo motivano, lo specificano, lo arricchiscono, lo esemplificano, lo riformulano, lo modalizzano, ne concedono un aspetto contrario ecc. Tali enunciati subalterni sono collegati in modo serrato a quello principale anche

1. Le varie unità che compongono il testo, e che vedremo in seguito, si presentano organizzate e collegate su vari piani (tematico-referenziale, logico-argomentativo, enunciativo-polifonico); in questo libro useremo la dicitura logico-argomentativo anche con un altro valore: quello di designare e caratterizzare uno specifico movimento testuale, che procede proponendo al lettore specifiche modalità di approccio ai contenuti.

2. L'enunciato è la concretizzazione linguistica dell'unità comunicativa (A. Ferrari, 2014, pp. 81-82; Ferrari, Lala & Zampese, 2021, pp. 34-39); in questo volume abbiamo scelto di ricorrere esclusivamente al termine enunciato, caratterizzandolo anche matematicamente. Successivamente vedremo nel dettaglio le possibili differenze tra la demarcazione standard del confine di enunciato secondo la linguistica (solitamente data dall'interpunzione, in particolare dalle pause forti) e i confini dei microatti da noi considerati, per cui non vi è sempre corrispondenza uno a uno (un enunciato linguistico-un microatto). I nostri microatti, infatti, spesso coincidono con singoli enunciati, ma possono anche designare un insieme di due o più enunciati, formalmente separati da pause forti, ma inscindibili a livello di unità comunicative intese in senso matematico; viceversa, uno stesso enunciato in senso linguistico potrebbe contenere più di una unità comunicativa portatrice di significato matematico.

dal punto di vista tematico-referenziale: ne riprendono tipicamente il topic (il tema) o ne sviluppano dei sotto-topic (sottotemi).

Le sedi linguistiche del movimento testuale variano da testo a testo. Nei testi narrativi o nella saggistica emerge per esempio tipicamente, ma non necessariamente, il capoverso, cioè una sequenza linguistica, lunga o breve che sia, marcata da un punto (o altra pausa forte) e a capo; questa coincidenza tra semantica e unità sintattico-interpuntiva non è tuttavia necessaria: ci sono capoversi costituiti da più di un movimento testuale e, viceversa, ci sono capoversi che consistono di un solo enunciato. Nel testo scolastico di matematica, come segnalatori di confine del movimento testuale spesso intervengono anche espedienti grafici come bordi, cornici, box colorati e spaziature particolari, che, idealmente, si propongono di agevolare, orientare il lettore nell'individuazione di determinati blocchi di testo. Inoltre, un movimento testuale include spesso anche una o più parti figurali.

Al di sotto della dimensione dell'enunciato vi sono le unità informative: sotto-parti di enunciato la cui funzione principale consiste nel gerarchizzare il contenuto dell'enunciato stesso, scegliendo fra quanto sta in primo piano – ed è responsabile della progressione logico-argomentativa e tematica centrale del testo – e quanto sta, invece, sullo sfondo comunicativo dell'enunciato³. Ad esempio, nell'enunciato "I vertici del poligono (appartenendo tutti alla circonferenza) sono tutti equidistanti dal centro O", l'unità informativa collocata fra parentesi è un'unità di sfondo, che occupa una posizione secondaria rispetto all'altra, di primo piano ("I vertici del poligono sono tutti equidistanti dal centro O"). Dal punto di vista della costruzione del sapere matematico ci si può chiedere quanto la collocazione sullo sfondo di un'informazione come questa (e gli esempi potrebbero essere moltissimi) possa incidere sulla lettura, sulla comprensione e quindi sulla rappresentazione semantica dell'allievo.

Sintetizzando, se il movimento testuale è fondamentale per capire come parla il libro scolastico al lettore, l'enunciato è la dimensione-chiave per qualificare la comunicazione (nel nostro caso, per caratterizzarla matematicamente), mentre l'unità informativa è essenziale per capire come il messaggio dell'enunciato viene proposto al lettore. Nei prossimi paragrafi illustreremo a livello qualitativo (descrittivo) e quantitativo i movimenti testuali (macroatti) e gli enunciati (microatti) caratteristici dei testi matematici, lasciando la riflessione sulle unità informative ad approfondimenti di tipo qualitativo relativi ad alcuni casi significativi.

L'intento di questo capitolo è dunque quello di addentrarsi nel testo scolastico di matematica per analizzare e descrivere le sue caratteristiche strutturali e compositive.

3. Possono ovviamente esistere anche enunciati composti da una sola unità informativa (p. es. "In ogni triangolo ogni lato può essere la sua base"). Come vedremo al **paragrafo 5.4**, tale compattezza è molto ricorrente in alcuni degli enunciati più caratterizzanti del testo matematico, proprio a causa di alcune delle caratteristiche più tipiche della lingua stessa della disciplina (**cap. 2**).

Sulla base di quanto emerso dalle annotazioni del corpus, è possibile delineare un quadro globale delle unità testuali tipiche e ricorrenti nei testi per la scuola: ciò significa osservare più in profondità e dettagliatamente come il contenuto matematico viene presentato ad allievi, che si trovano di fronte un testo che “parla” loro alternando diverse modalità, seppur con lo scopo complessivo di esporre e spiegare. Ne emerge una tipologia varia di unità di diverso livello, in cui il contenuto viene trasposto, organizzato e veicolato tramite diverse forme e intenzioni comunicative; i movimenti testuali (**par. 5.2**) sono stati individuati evidenziandone in particolare le peculiarità pragmatico-funzionali, mentre gli enunciati (**par. 5.3**) sono stati classificati individuando microatti tipici della matematica. Le unità informative, invece, non hanno una caratterizzazione specifica, in quanto sono le sottoparti in cui si articolano gli enunciati. Precisiamo inoltre che saranno esaminati solo gli enunciati con peculiarità matematiche (che sono la maggior parte di quelli presenti nei testi), mentre non si commenteranno gli enunciati che hanno altre funzioni (consegne, espressioni di passaggio, richiami al lettore) e che quindi non sono stati annotati come enunciati tipici del testo matematico. Nei paragrafi successivi verrà messa anche in evidenza l’evoluzione quantitativa dei tipi di movimenti testuali ed enunciati nei diversi anni scolastici, mentre per quanto concerne le unità informative un’indagine di questo tipo non avrebbe senso, né sarebbe possibile: come si è detto, esse saranno considerate per osservare la costruzione interna e l’organizzazione informativa di alcuni enunciati (**par. 5.4**).

I rilievi sulle unità del testo e sui loro rapporti tematico-referenziali e di organizzazione testuale mostreranno come il testo scolastico di matematica è caratterizzato da un’architettura logico-semantica dotata di tratti unici e di peculiarità compositive: se, da una parte, la sua architettura riflette quella del testo in generale, d’altra parte ha delle specificità di cui è doveroso tenere conto, dipendenti dal contenuto e dalle modalità ricorrenti di presentarlo.

5.2 I movimenti testuali (macroatti)

I movimenti testuali che si incontrano tipicamente nei manuali di matematica sono stati così classificati (**Tab. 1**):

Movimenti testuali	Funzioni	Tipi	Modalità
Espositivo-esplicativo	far sapere	Dichiarativo	<i>Esporre</i>
		Logico-argomentativo	<i>Fare</i>
			<i>Immaginare</i>
			<i>Astrarre</i>
		Narrativo-descrittivo	<i>Approfondire</i>
Direttivo	far fare		<i>Applicare</i>

Tab. 1 – La classificazione dei movimenti testuali tipici del testo scolastico di matematica.

I movimenti fondamentali sono due: *espositivo-esplicativo* (l'intento è "far sapere") e *direttivo* (l'intento è "far fare"); il primo può essere di tre tipi (*dichiarativo*, *logico-argomentativo* o *narrativo-descrittivo*), e, a sua volta, il movimento *logico-argomentativo* può realizzarsi in tre diverse modalità (*fare*, *immaginare* e *astrarre*). Al movimento *direttivo* non sono state assegnate caratterizzazioni interne, in quanto presenta tratti omogenei. I movimenti presentano significative differenze di realizzazione a seconda soprattutto dell'ordine scolastico; nessuno di essi va, perciò, inteso come una categoria stabile e chiusa, ma, piuttosto, come un tipo di riferimento.

I nomi dei movimenti sono stati attribuiti attingendo da diversi settori degli studi linguistici, in modo da individuare le specificità delle varie parti di testo, enfatizzando in particolare la funzione pragmatico-comunicativa di esse. La breve descrizione sarà seguita da esempi selezionati sulla base della rappresentatività e della chiarezza.

5.2.1 Espositivo-esplicativo

Il movimento testuale *espositivo-esplicativo* realizza, secondo diverse modalità illocutive, l'intento di "far sapere" qualcosa al lettore ed è stato distinto in tre tipi.

Tipo 1: Dichiarativo

Il movimento *espositivo-esplicativo* di tipo *dichiarativo* è il più tipico del testo espositivo, in quanto è dedicato a esporre un contenuto; è in genere strutturato intorno a un enunciato principale che asserisce qualcosa (ad esempio una definizione o una proposizione), il quale può essere specificato o ampliato da ulteriori enunciati. Attraverso questo tipo di macroatto il lettore riceve le informazioni come date, dichiarate, esposte, in genere tramite asserzioni, che sono il formato privilegiato per la trasmissione di contenuti informativi. Questo tipo di movimento non cambia molto nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di primo grado, ma, con il livello scolastico, aumentano la densità informativa e lessicale; a livello di strutturazione del testo, l'elenco è una modalità ricorrente, soprattutto nei testi per la secondaria di primo grado.

Nell'esempio seguente per la II primaria (**Fig. 1, 4_2, p. 171**), si può osservare un breve atto *dichiarativo* composto da due enunciati, il secondo dei quali è composto da una parte linguistica che introduce la frase e fornisce i nomi agli oggetti matematici che vengono presentati tramite degli esempi figurati. Si deve dunque desumere che cosa si intende per lato e vertice estrapolando le informazioni dalle figure.

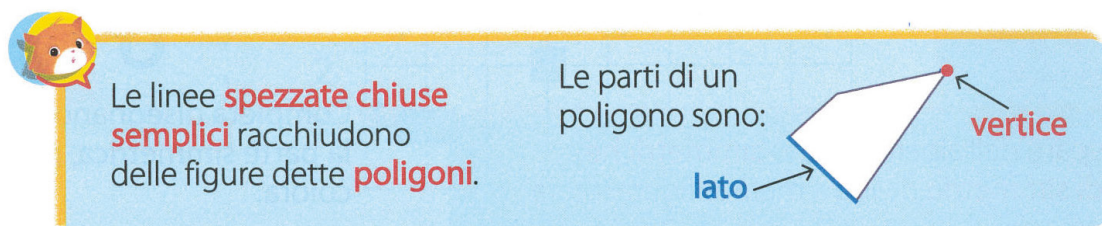


Fig. 1 – Esempio di movimento testuale *espositivo-esplicativo* di tipo *dichiarativo* (II primaria).

Un altro caso esemplare di macroatto *dichiarativo* è il seguente, tratto da un testo per la IV primaria (Fig. 2, 2_4, p. 336):

In un poligono puoi sempre trovare i seguenti elementi.

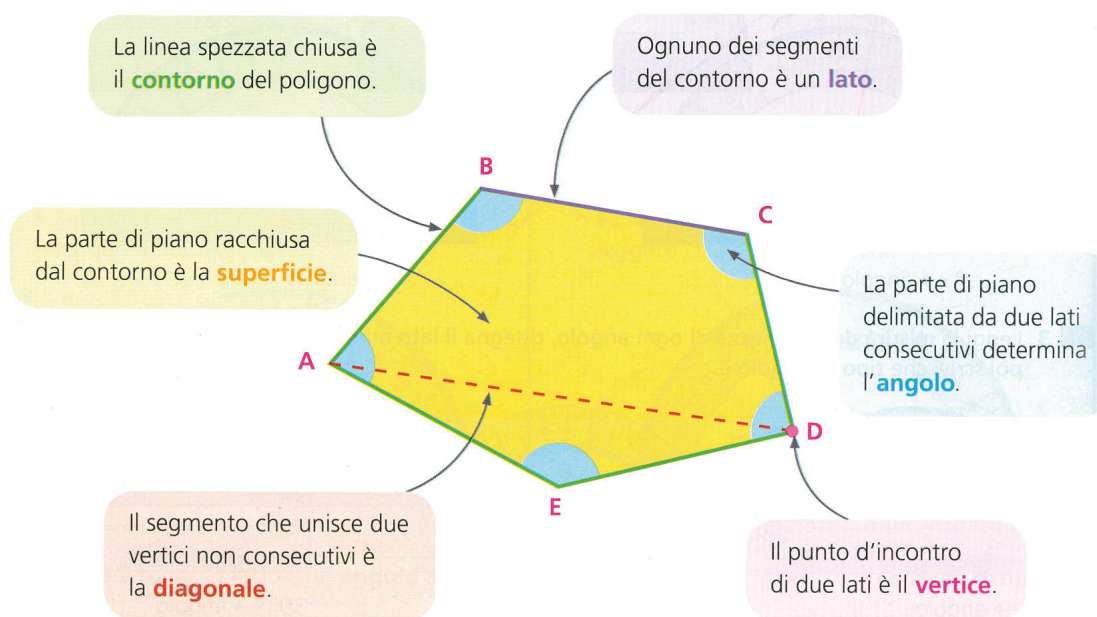


Fig. 2 – Esempio di movimento testuale *espositivo-esplicativo* di tipo *dichiarativo* (IV primaria).

Questo macroatto presenta un'unitarietà tematica e comunicativa evidente: lo scopo è dare informazioni sul poligono. Inizia con l'enunciato di inquadramento globale "In un poligono puoi sempre trovare i seguenti elementi" (seguito dal punto, anche se sarebbero stati necessari i due punti) e si snoda, poi, come spesso accade, intorno a una figura, tramite vari microatti (enunciati) giustapposti, connessi da una implicita relazione di aggiunta (veicolano vari elementi informativi).

Da ultimo, il movimento testuale *dichiarativo* può anche presentarsi in formato *mappa-diagramma*, cioè in forma di mappa concettuale, diagramma o schema, solitamente con funzione di sintesi o di riepilogo di parti concettuali; è una forma tipica dei testi *misti*, in cui coesistono parti di testo *continuo* accompagnate da elementi *non continui*, che richiedono un particolare approccio di lettura e di interpretazione. In **Figura 3** si può vedere un esempio di *mappa-diagramma* tratto da un volume di V primaria (2_5, p. 355), molto denso di informazioni e in cui, in poco spazio, compaiono accostati vari codici semiologici e registri di rappresentazione propri del linguaggio della disciplina (parole scritte, figure, formule con lettere, numeri e altri simboli convenzionali):

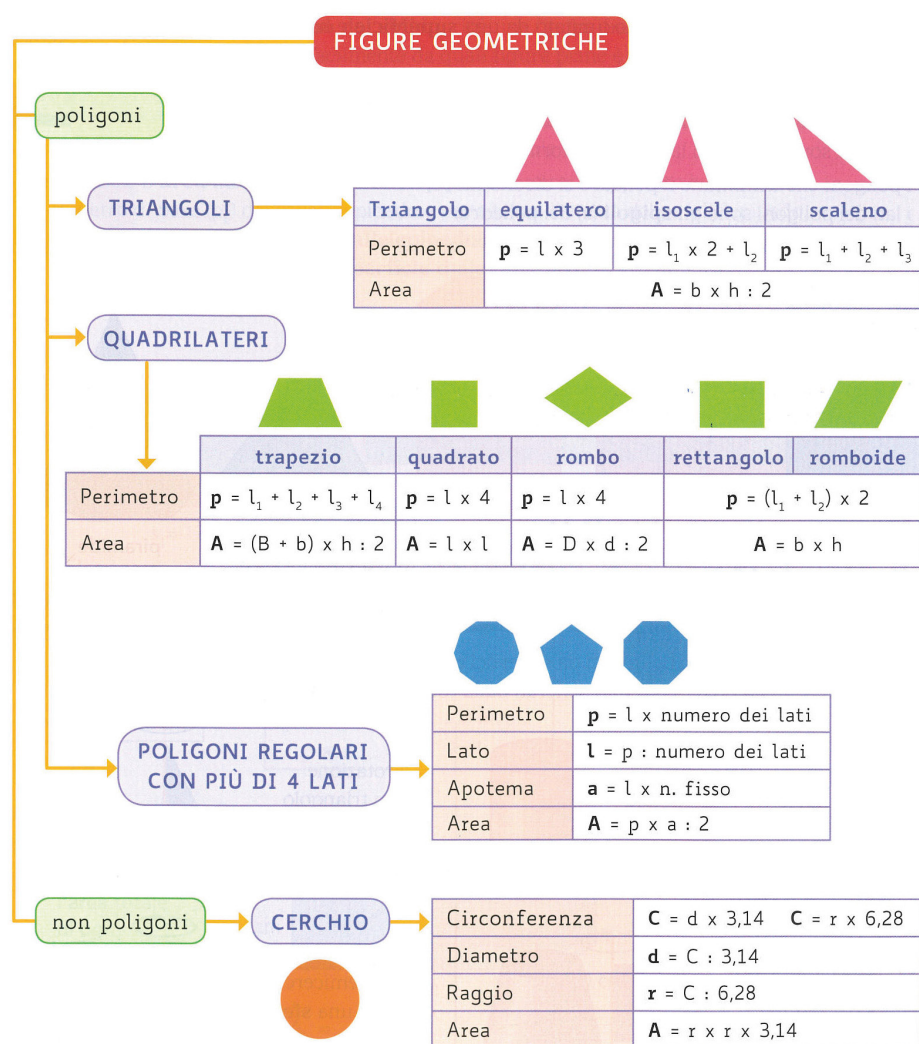


Fig. 3 – Esempio di movimento testuale *espositivo-esplicativo* di tipo *dichiarativo* (V primaria), in formato *mappa-diagramma*.

Tipo 2: Logico-argomentativo

Il movimento testuale *logico-argomentativo* accompagna il ragionamento del lettore nella costruzione del sapere o comunque cerca di favorire l'interiorizzazione di esso attraverso prove (concrete o simulate) e confronti utili a comprendere e a supportare un'asserzione. In esso non si realizzano tutte le specificità concettuali e formali dell'argomentazione vera e propria; più semplicemente, i passaggi proposti per attivare il lettore vanno intesi come tipi particolari di "prove" o "argomenti" a sostegno di ciò che, altrimenti, avrebbe potuto essere semplicemente dichiarato, esposto (ricadendo nel macroatto *dichiarativo*). In questo movimento sono stati individuati vari sotto-tipi illustrati qui di seguito⁴.

- *Logico-argomentativo* con la modalità di far *fare*: movimento testuale che propone all'allievo di fare un'azione concreta come *colorare, ripassare, scrivere, ritagliare, tracciare, costruire, completare* ecc., non per esercitare qualcosa che ha da poco appreso (nel caso si tratterebbe di un atto direttivo, come vedremo in seguito), ma per scoprire gradualmente un sapere che verrà enunciato in seguito (più raramente si trova all'inizio ed è seguito dall'azione). Spesso ci sono uno o più verbi all'imperativo che esortano l'allievo a fare concretamente qualcosa al fine di accostarsi all'enunciazione del sapere (p. es. una definizione di *poligoni*) tramite elementi ricavati dall'esperienza diretta, come mostra questo esempio tratto da un volume di III primaria (Fig. 4, 2_3, p. 105):

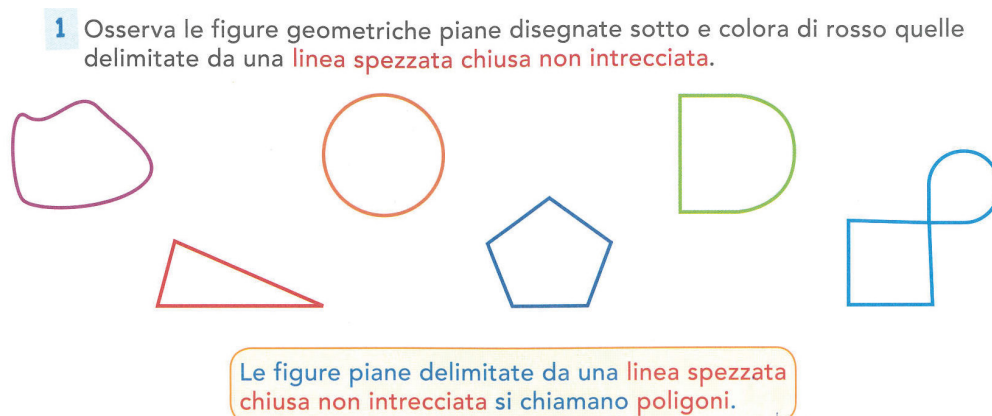


Fig. 4 – Esempio di movimento testuale *logico-argomentativo* di tipo *fare* (III primaria).

4. Sebbene si sia scelto di mostrare solo un esempio per categoria, va precisato che tutte e tre le modalità di movimenti *logico-argomentativi* illustrati possono presentare un'ampia varietà al loro interno, soprattutto in continuità fra scolarità primaria e secondaria di primo grado: maggiore attenzione a queste differenze sarà prestata nel caso di studio dedicato (par. 6.1).

Alla definizione si arriva solo dopo che il lettore ha attivato le sue preconoscenze e ha effettuato concretamente un'azione (*colorare*). Si tratta di una modalità molto ricorrente nei testi dei primi anni di scuola primaria, con vari livelli di complessità, finalizzata a far costruire all'allievo una relazione di motivazione tra ciò che fa (e sa) e la definizione come punto d'arrivo.

- *Logico-argomentativo* con la modalità di far *immaginare*: movimento testuale simile al precedente, ma che propone all'allievo di osservare, di seguire un'azione concreta già svolta nel libro o di immaginare una situazione che lo aiuti a comprendere meglio un concetto o una proprietà. Ne è un esempio il seguente, tratto da un volume di I secondaria di primo grado (Fig. 5, 9_6, p. 146):

- Con quattro strisce lunghe rispettivamente 3,5 cm, 2,5 cm, 6 cm e 2 cm proviamo a costruire un poligono, ovvero una spezzata chiusa.

Comunque unirai le quattro strisce, ad esempio come nella figura a fianco, riuscirai sempre a chiudere la spezzata e quindi a ottenere un poligono. Questo perché ciascuna striscia è sempre minore della somma delle altre tre.



Prova ora con quattro strisce lunghe rispettivamente 1,5 cm, 2,7 cm, 2 cm e 6,5 cm; per quanto proverai, non riuscirai a chiudere la spezzata. Questo perché una striscia è più lunga della somma delle altre tre ($6,5 > 1,5 + 2,7 + 2$).



È possibile quindi ottenere un poligono solo se **ciascun lato è minore della somma di tutti gli altri**.

In ogni poligono ciascun lato è sempre **minore della somma di tutti gli altri**.

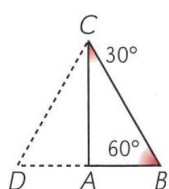


Fig. 5 – Esempio di movimento testuale *logico-argomentativo* di tipo *immaginare* (I secondaria di primo grado).

Poniamo che l'asserzione alla quale si vuole portare l'allievo (la "tesi") sia "In ogni poligono ciascun lato è sempre minore della somma di tutti gli altri". Ciò non viene subito enunciato, ma è introdotto e avvalorato dalla manipolazione (immaginata e rappresentata in figura) di quattro strisce; la commistione oggetti reali-astrazione geometrica è costante (*Con quattro strisce... proviamo a costruire un poligono; Comunque unirai le quattro strisce... riuscirai sempre a chiudere la spezzata...*): è proprio in passaggi come questi – in cui, in uno stesso

periodo, coabitano realtà e astrazione –, che si può cogliere con chiarezza, in vivo, il *paradosso cognitivo* (par. 2.4) per cui sono necessarie varie rappresentazioni semiotiche, tra le quali richiami a oggetti concreti, per parlare degli oggetti astratti della matematica.

- *Logico-argomentativo* con la modalità di far *astrarre*: movimento testuale che si muove su un piano squisitamente concettuale senza riferimenti ad azioni o a oggetti concreti, arrivando a costruire il sapere con il lettore procedendo per passi di ragionamento basati unicamente sul rimando ad aspetti teorici della matematica; spesso è caratterizzato da connettivi e modi linguistici tipici dell'argomentazione (*se... allora..., quindi, dato che, si deduce* ecc.). È un tipo di macroatto peculiare dei testi di scuola secondaria, di cui qui si offre un esempio (Fig. 6, 2_6, p. 212):



- e. Se un triangolo rettangolo ABC ha un angolo acuto di 30° , allora l'altro angolo acuto è di 60° . Questo significa che il triangolo rettangolo considerato è la metà del triangolo equilatero DBC avente per lato l'ipotenusa del triangolo rettangolo. Sappiamo che in un triangolo equilatero l'altezza è anche mediana, perciò possiamo affermare che AB è la metà di BD e quindi anche di BC . Dunque:



In un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60° il cateto opposto all'angolo acuto di 30° è la metà dell'ipotenusa.

Fig. 6 – Esempio di movimento testuale *logico-argomentativo* di tipo *astrarre* (I secondaria di primo grado).

L'esempio mostra la costruzione del sapere richiamando alcuni elementi matematici che si presuppongono già noti per arrivare a una nuova acquisizione: i passaggi procedono in modo serrato su un piano squisitamente matematico, scanditi da forme linguistiche di collegamento peculiari dell'argomentazione (quali *Se...allora..., perciò..., quindi..., dunque...*).

Tipo 3: Narrativo-descrittivo

Il movimento testuale *narrativo-descrittivo* individua quelle sezioni testuali minoritarie (a livello quantitativo) difficili da rubricare in altro modo, quali possono essere brevi narrazioni, excursus storico-etimologici, giochi, ampliamenti culturali che arricchiscono le vedute sulla matematica e così via. Eccone un breve esempio offerto in un volume per la III primaria (Fig. 7, 17_3, p. 94):

GIOCHIAMO CON IL TANGRAM

Questo è il **tangram**, un antico gioco di origine cinese ottenuto scomponendo un quadrato in sette parti dette **tan**: un quadrato, un romboide e cinque triangoli rettangoli isosceli, di cui due grandi, uno medio e due piccoli.

I Cinesi chiamano questi pezzi "Le sette pietre della saggezza" perché credevano che la padronanza di questo gioco fosse la chiave per ottenere saggezza e talento.

Combinando opportunamente i pezzi del tangram, è possibile ottenere innumerevoli figure, alcune geometriche, altre che ricordano oggetti d'uso comune.

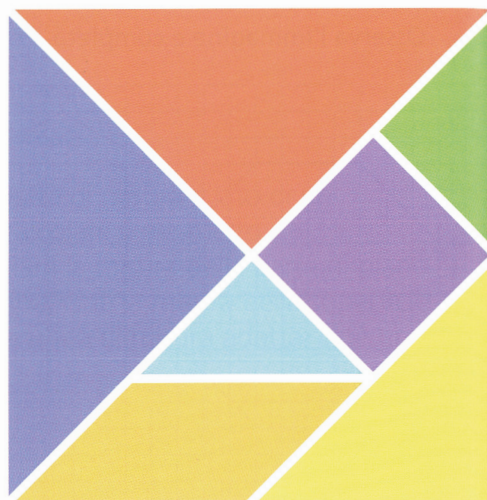


Fig. 7 – Esempio di movimento testuale *espositivo-esplicativo* di tipo *narrativo-descrittivo* (III primaria).

Situati nell'immediato intorno delle parti più tecniche, simili atti perseguono il fine comunicativo di avvicinare il lettore in modo accattivante ad aspetti vari e curiosi della materia, approfondendoli.

5.2.2 Direttivo

La seconda macrocategoria di movimenti testuali raccoglie i macroatti di tipo *direttivo*: sono i macroatti delle consegne degli esercizi, che richiedono dunque di fare qualcosa. Poiché l'analisi si è concentrata sulle parti teoriche dei testi, sono stati annotati come macroatti *direttivi* i movimenti applicativi-esercitativi presenti nelle pagine di teoria e non nelle sezioni di esercizi. La differenza d'intento è sostanziale: questi esercizi sono strettamente collegati alla costruzione, al richiamo, al consolidamento e all'applicazione di un sapere comunicato in precedenza; in alcuni casi richiedono risposte per le quali è necessario esplicitare delle conoscenze (ad esempio in forma di domanda oppure in forma di *cloze*, andando così a ricostruire una sorta di parte teorica), in altri casi sollecitano l'attivazione di abilità, ma in entrambi i casi ci si riferisce a parti teoriche precedentemente esposte. Ecco un estratto che offre due macroatti *direttivi* collocati, dopo un atto *dichiarativo*, in una pagina di un libro di II primaria (Fig. 8, 7_2, p. 81): numerati con 1 e 2, entrambi sono caratterizzati da verbi all'imperativo: (*ripassa, colora, fai un pallino*); il primo chiede esplicitamente di recuperare e di scrivere delle conoscenze, il secondo le fa esprimere attraverso un'abilità (quella di individuare i poligoni):

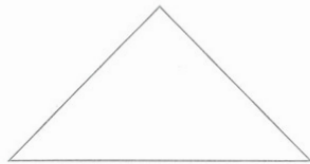
I POLIGONI

Osserviamo un poligono in tutte le sue parti.

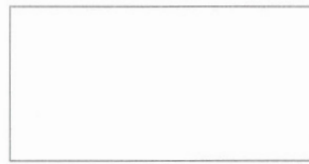


- Le punte si chiamano **vertici**.
- I tratti di linea spezzata si chiamano **lati**.
- La regione interna si chiama **superficie**.
- Il confine si chiama **perimetro**.

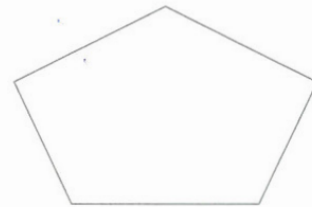
① Ripassa in blu i **lati**, colora di giallo la **superficie** e fai un pallino rosso sui **vertici**. Poi rispondi.



- Quanti vertici?
- Quanti lati?



- Quanti vertici?
- Quanti lati?



- Quanti vertici?
- Quanti lati?

② Con colori diversi colora solo i **poligoni**.

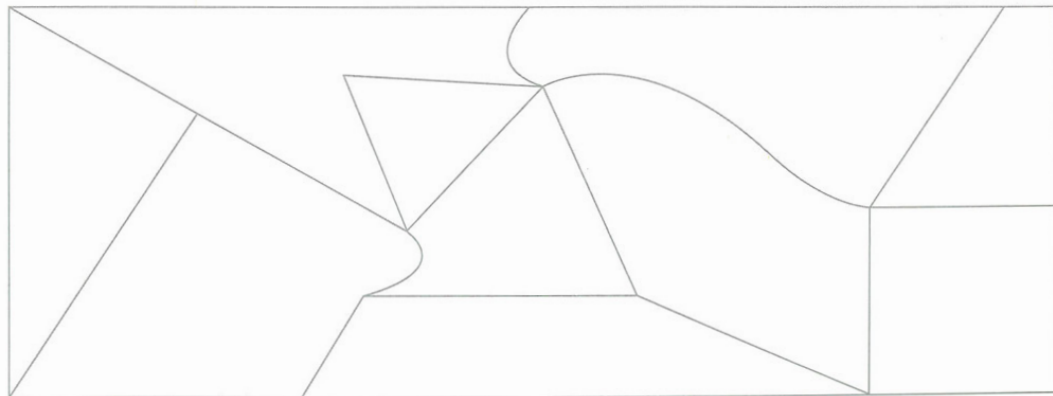


Fig. 8 – 1 e 2 sono esempi di movimenti testuali *direttivi* (II primaria).

Si propone l'intera pagina per mostrare in essa la collocazione dei movimenti *direttivi* (dopo un atto *dichiarativo* che "fa sapere") e la loro funzione: i due macroatti *direttivi* "fanno fare", chiedono cioè al lettore di eseguire qualcosa per mettere in atto tramite un esercizio quanto ha appena letto e appreso, così da consolidarlo nell'immediato.

5.2.3 Dati quantitativi sui movimenti testuali (macroatti) nel corpus

Dopo aver presentato la descrizione tipologica dei vari movimenti testuali, è ora interessante passare a osservarne la distribuzione quantitativa nei testi (cioè osservare quanto i diversi tipi siano effettivamente presenti nei libri). L'estrazione di questi dati è stata resa possibile grazie all'annotazione complessiva del corpus, la cui successiva elaborazione ha permesso di tracciare un quadro completo e preciso di "come parlano" i testi scolastici di geometria, sia osservando il corpus nel suo insieme, sia prendendo in esame i diversi anni di scolarità, per studiare cambiamenti e differenze. Poiché vi sono differenze legate alla presenza e all'uso dei libri di testo nella pratica didattica tra il contesto italiano, il contesto del Canton Grigioni e quello del Canton Ticino, tratteremo i corpora separatamente, concentrandoci dapprima sulla situazione italiana e successivamente su quella delle aree svizzere di lingua italofona.

5.2.3.1 L'evoluzione dei movimenti testuali (macroatti) nel corpus italiano

Nella **Tabella 2** vengono riportati i dati quantitativi globali relativi alla presenza dei movimenti testuali nei libri scolastici italiani presi in esame:

Tipi di movimento testuale	Quantità nel corpus italiano
Dichiarativo	2'829 (48,92%)
Logico-argomentativo	1'383 (23,91%)
Narrativo-descrittivo	153 (2,65%)
Direttivo	1'418 (24,52%)
Totale	5'783 (100%)

Tab. 2 – Quantità dei movimenti testuali nel corpus italiano espresse in forma numerica e percentuale.

Già a un primo sguardo è possibile notare come i testi geometrici italiani privilegino, complessivamente, la modalità comunicativa che più potremmo aspettarci nel testo scolastico: quella *dichiarativa*, del "dire le cose". Se ciò non stupisce, è interessante, però, concentrarsi su altri dati, come il fatto che, insieme, atti *logico-argomentativi* e *direttivi* raggiungano quantitativamente quelli *dichiarativi*, ma anche, per contro, la bassissima presenza di unità testuali che raccontano e che ampliano le conoscenze (ad esempio storiche o interdisciplinari), a conferma di una scelta netta nella manualistica recente: la matematica a scuola è presentata in forma storica, atemporale, non inquadrata nel percorso di sviluppo e nei bisogni dell'umanità di ieri e di oggi; cosa che merita una riflessione.

La **Tabella 3** mostra, poi, l'evoluzione anno per anno della presenza dei diversi macroatti:

Tipi di movimento testuale	Quantità nel corpus italiano						
	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG ⁵
Dichiarativo	18 (15,93%)	67 (21,89%)	409 (34,05%)	329 (38,35%)	1'409 (65,23%)	530 (50,72%)	67 (67,00%)
Logico-argomentativo	25 (22,12%)	59 (19,28%)	244 (20,32%)	139 (16,20%)	499 (23,10%)	391 (37,42%)	26 (26,00%)
Narrativo-descrittivo	1 (0,89%)	4 (1,31%)	16 (1,33%)	8 (0,93%)	87 (4,03%)	37 (3,54%)	0 (0%)
Direttivo	69 (61,06%)	176 (57,52%)	532 (44,30%)	382 (44,52%)	165 (7,64%)	87 (8,32%)	7 (7,00%)
Totale	113 (100%)	306 (100%)	1'201 (100%)	858 (100%)	2'160 (100%)	1'045 (100%)	100 (100%)

Tab. 3 – Presenza dei movimenti nei testi del corpus italiano nei diversi anni di scolarità espressa in forma numerica e percentuale.

Come si può notare, i libri per la I secondaria di primo grado (SSPG) sono i più ricchi (2'160 macroatti), quantitativamente, di testo (certamente anche per il ruolo in quell'anno di scolarità del tema da noi scelto); qualitativamente, poi, possiamo notare il grande numero di macroatti *dichiarativi* (ben 1'409) nei manuali per quest'anno di scolarità, che ricopre oltre il 65% del testo, a fronte di una situazione più equilibrata nella scuola primaria (SP), i cui libri, non solo in II e III, ma ancora in IV e V, presentano all'allievo forme di comunicazione e di interazione più variate nella costruzione del sapere (lo si nota prevalentemente dall'alto numero di *direttivi*). I dati confermano, dunque, una testualità e una pragmatica piuttosto diverse con allievi di diverse età, ai quali è via via richiesto di accostarsi alla disciplina con modi e strumenti nuovi, sempre più lontani dalle prassi abituali, e più vicini ai tratti e agli strumenti della disciplina e del discorso scientifico primario. In particolare, fra scolarità primaria e secondaria i testi confermano una sorta di "frattura comunicativa", che vale la pena di sottolineare per le ricadute che potrebbe avere in termini di adeguatezza e di efficacia nell'apprendimento.

5. Per giustificare, qui e in seguito, le differenze numeriche e percentuali dei dati relativi alla III secondaria di primo grado (SSPG), va specificato che il corpus relativo a questa classe è molto più breve degli altri, cosa che rende impossibile un confronto senza alcune cautele: ciò perché l'argomento poligoni viene considerato già affrontato negli anni precedenti e in questo anno è trattato di solito come ripasso, in porzioni di testo non troppo lunghe. Pertanto, il numero di movimenti testuali e, poi (come vedremo al paragrafo successivo), di enunciati ricavati dai libri per la III SSPG è inferiore e meno rappresentativo dei dati delle altre classi.

La **Tabella 4** mostra invece il dettaglio di un dato particolarmente interessante: quello sui diversi tipi di macroatti *logico-argomentativi* (insieme ai dati degli altri macroatti già riportati in **Tab. 3**). In particolare, va rimarcato il cambiamento nella presenza dei *logico-argomentativi* di tipo *fare* (modalità privilegiata nella scuola primaria, come mostra in particolare il dato di IV), destinati quasi a sparire nella secondaria di primo grado, segnando un cambiamento di approccio comunicativo e di costruzione concettuale alla disciplina. Per contro, resistono e aumentano (almeno fino alla I secondaria di primo grado) i macroatti *logico-argomentativi* di tipo *immaginare*, seppur con vistose differenze al loro interno, e quelli di tipo *astrarre*, basati unicamente su passaggi concettuali, quasi assenti nella primaria, che trovano piena espressione nel successivo ordine di scolarità. Per un approfondimento del movimento *logico-argomentativo* nei suoi vari tipi si veda il **paragrafo 6.1**.

Tipi di movimento testuale	Quantità nel corpus italiano						
	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Dichiarativo	18 (15,93%)	67 (21,89%)	409 (34,05%)	329 (38,35%)	1'409 (65,23%)	530 (50,72%)	67 (67,00%)
Logico-argomentativo (fare)	22 (19,47%)	51 (16,67%)	127 (10,58%)	84 (9,79%)	15 (0,69%)	2 (0,19%)	0 (0%)
Logico-argomentativo (immaginare)	3 (2,65%)	8 (2,61%)	116 (9,66%)	49 (5,71%)	235 (10,88%)	124 (11,87%)	6 (6,00%)
Logico-argomentativo (astrarre)	0 (0%)	0 (0%)	1 (0,08%)	6 (0,70%)	249 (11,53%)	265 (25,36%)	20 (20,00%)
Narrativo-descrittivo	1 (0,89%)	4 (1,31%)	16 (1,33%)	8 (0,93%)	87 (4,03%)	37 (3,54%)	0 (0%)
Direttivo	69 (61,06%)	176 (57,52%)	532 (44,30%)	382 (44,52%)	165 (7,64%)	87 (8,32%)	7 (7,00%)
Totale	113 (100%)	306 (100%)	1'201 (100%)	858 (100%)	2'160 (100%)	1'045 (100%)	100 (100%)

Tab. 4 – Presenza dei movimenti testuali nei testi per i diversi anni di scolarità, con dettaglio dei *logico-argomentativi*, espressa in forma numerica e percentuale.

Se le cose possono mostrarsi all'incirca com'era lecito aspettarsi – abituati come si è ad accettare la manualistica nei suoi modi consolidati –, l'osservazione sistematica di un numero così elevato di testi apre una serie di considerazioni e di interrogativi sulla base dei dati, da incrociare con l'opinione e con l'uso da parte dei docenti, nonché con la fruizione dei destinatari e con le potenziali difficoltà rilevate.

5.2.3.2 L'evoluzione dei movimenti testuali (macroatti) nel corpus svizzero

Per quanto riguarda il contesto svizzero, ricordiamo che la ricognizione dei libri di testo utilizzati nella scuola in Canton Ticino e in Canton Grigioni ha portato ad avere 13 libri in totale (5 della scuola primaria e 8 di scuola secondaria di primo grado). Va considerato che, pur essendo un campione piccolo, esso rispecchia l'elenco complessivo dei libri in lingua italiana consigliati dagli esperti di matematica per questi Cantoni.

Analizzando più in dettaglio quanto avviene nei due Cantoni, va considerato che in Ticino non vengono utilizzati libri di testo nella scuola primaria, dunque il sub-corpus è costituito da 7 libri di testo di scuola secondaria di primo grado: 3 di I SSPG, 3 di II SSPG e 1 di III SSPG, corrispondenti a tre titoli diversi, che rappresentano la totalità dei libri in cui si tratta il tema dei poligoni.

Per quanto concerne i macroatti emergono alcune interessanti differenze tra i dati riportati nella **Tabella 2** relativi al corpus italiano e quelli relativi al sub-corpus ticinese riportati nella **Tabella 5**. In particolare, nei libri ticinesi cala il numero complessivo di movimenti di tipo *dichiarativo* e *logico-argomentativo*, incentrati maggiormente su aspetti teorici legati a conoscenze e a ragionamenti a loro sostegno (dal 48,92% al 43,81% per i *dichiarativi* e dal 23,91% al 12,87% per i *logico-argomentativi*), a favore di movimenti di tipo *direttivo* (dal 24,52% al 37,87%): i libri ticinesi di scuola secondaria di primo grado sono infatti maggiormente incentrati sul "fare", puntando sulle abilità piuttosto che su aspetti teorici. Come riportato nel **paragrafo 6.1.1.5**, tra il corpus italiano e il sub-corpus ticinese cambia anche la distribuzione delle modalità all'interno dei movimenti *logico-argomentativi*, con una prevalenza della modalità di tipo *fare* per i libri ticinesi rispetto alle altre modalità, a conferma di questa distinzione assai evidente.

Tipi di movimento testuale	Quantità nel sub-corpus ticinese
Dichiarativo	177 (43,81%)
Logico-argomentativo	52 (12,87%)
Narrativo-descrittivo	22 (5,45%)
Direttivo	153 (37,87%)
Totale	404 (100%)

Tab. 5 – Quantità dei movimenti testuali nel sub-corpus ticinese espressa in forma numerica e percentuale.

Se inoltre si osserva la distribuzione dei movimenti testuali nelle tre classi di scuola secondaria di primo grado (**Tab. 6**), emerge un graduale aumento negli anni

del movimento *logico-argomentativo* e una diminuzione netta del *direttivo* arrivando a 0% in III secondaria di primo grado (SSPG). Ciò è principalmente dovuto al fatto che l'argomento poligoni, in terza, come si è detto, viene affrontato solo in un'ottica di ripasso degli elementi teorici (dunque viene riservato a esso minore spazio e minore varietà).

Tipi di movimento testuale	Quantità nel sub-corpus ticinese		
	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Dichiarativo	118 (41,26%)	43 (50,00%)	16 (50,00%)
Logico-argomentativo	22 (7,70%)	16 (18,61%)	14 (43,75%)
Narrativo-descrittivo	18 (6,29%)	2 (2,32%)	2 (6,25%)
Direttivo	128 (44,76%)	25 (29,07%)	0 (0%)
Totale	286 (100%)	86 (100%)	32 (100%)

Tab. 6 - Distribuzione dei movimenti testuali per anno nel sub-corpus ticinese espressa in forma numerica e percentuale.

Ancora più evidenti sono le stesse considerazioni applicate al sub-corpus grigionese (**Tab. 7**), costituito da 6 libri facenti parte di un'unica collana di testi di matematica in lingua italiana, comprendente un libro per ogni anno di scolarità (dalla II SP alla VI SP, e un libro di I SSPG). In tale sub-corpus i movimenti *dichiarativi* e *logico-argomentativi* sono assai ridotti rispetto agli altri corpus o sub-corpus (22,6% per i *dichiarativi* e 1,01% per i *logico-argomentativi*) a favore di quelli *direttivi* (74,87%), ma va considerato che i corpora e sub-corpora sono assai diversi tra loro, riguardando livelli scolastici differenti. Non vengono analizzati tali macroatti distribuiti per anno perché il campione è troppo ridotto.

Tipi di movimento testuale	Quantità nel sub-corpus grigionese
Dichiarativo	44 (22,22%)
Logico-argomentativo	2 (1,01%)
Narrativo-descrittivo	3 (1,52%)
Direttivo	149 (75,25%)
Totale	198 (100%)

Tab. 7 - Quantità dei movimenti testuali nel sub-corpus grigionese espresse in forma numerica e percentuale.

Si può tuttavia rilevare una preferenza, nei seppur pochi testi grigionesi, per i macroatti *direttivi* lungo tutto il percorso di scuola primaria, affiancati da alcuni macroatti *dichiarativi*. Invece, i movimenti *logico-argomentativi* non crescono quantitativamente nemmeno nelle ultime classi, come invece accade in particolare nella manualistica italiana (Tabb. 3 e 4).

5.2.3.3 L'evoluzione dei movimenti testuali (macroatti) iniziali

L'incipit di una trattazione, cioè l'introduzione a un tema o a un suo aspetto specifico, è significativo per ricavare informazioni rispetto ai modi comunicativi di un testo; lo è anche quando si tratta di testi scolastici, che, com'è noto, tendono ad avere molti tratti in comune tra loro, conferendo alla manualistica scolastica, con differenze nelle varie discipline, i tratti di un vero e proprio "genere". Al fine di riconoscere le modalità e gli stili prevalentemente adottati dai testi del corpus italiano⁶ nell'introdurre i vari argomenti proposti agli allievi, è stata osservata, per ogni testo oggetto di indagine, la partenza (cioè il primo macroatto presente), identificandone il tipo. È stato quindi effettuato un conteggio per tipo di macroatto, sia a livello globale sia in base all'anno, così da mostrare anche l'evoluzione stilistica legata al progredire del livello scolastico.

Il primo dato che emerge dall'osservazione delle partenze di tutti i testi considerati a livello globale riportati in **Figura 9**, è che quasi la metà di questi (58 su 129) inizia con un macroatto di tipo *dichiarativo*. Il secondo e il terzo tipo per frequenza nelle partenze sono il *logico-argomentativo* con la modalità di *far fare* e il *direttivo* (rispettivamente con 24 e 23 testi, meno della metà rispetto al numero dei primi macroatti di tipo *dichiarativo*). 12 testi presentano un primo macroatto di tipo *logico-argomentativo* con la modalità di *far immaginare*, 11 di tipo *narrativo-descrittivo*. Infine, 1 solo testo ha una partenza di tipo *logico-argomentativo* con la modalità di *far astrarre*. Si può osservare, confrontando queste frequenze con quelle complessive su tutti i macroatti considerati all'interno dei testi, che quest'ultimo tipo, poco utilizzato in avvio di trattazione, risulta invece complessivamente più presente, ad esempio, del *narrativo-descrittivo*, che risulta invece abbastanza attestato come primo approccio all'argomento, ma poco utilizzato nei successivi sviluppi del discorso (è come se fosse ritenuto utile per incuriosire e attirare l'attenzione del lettore, ma non per farlo addentrare più a fondo nella disciplina). Anche i macroatti

6. Si è scelto di effettuare questa analisi solo per il corpus italiano, in quanto risulterebbe poco significativa per il corpus svizzero: il sub-corpus del Ticino è infatti composto da soli 7 libri, per altro riferiti esclusivamente alla scuola secondaria di primo grado; il sub-corpus dei Grigioni comprende 6 libri di testo, uno per anno di scolarità dalla II alla VI scuola primaria più un libro di I secondaria di primo grado, appartenenti tutti alla medesima collana.

logico-argomentativi con la modalità di far *fare* appaiono proporzionalmente più adottati nelle partenze che nelle altre parti dei testi.

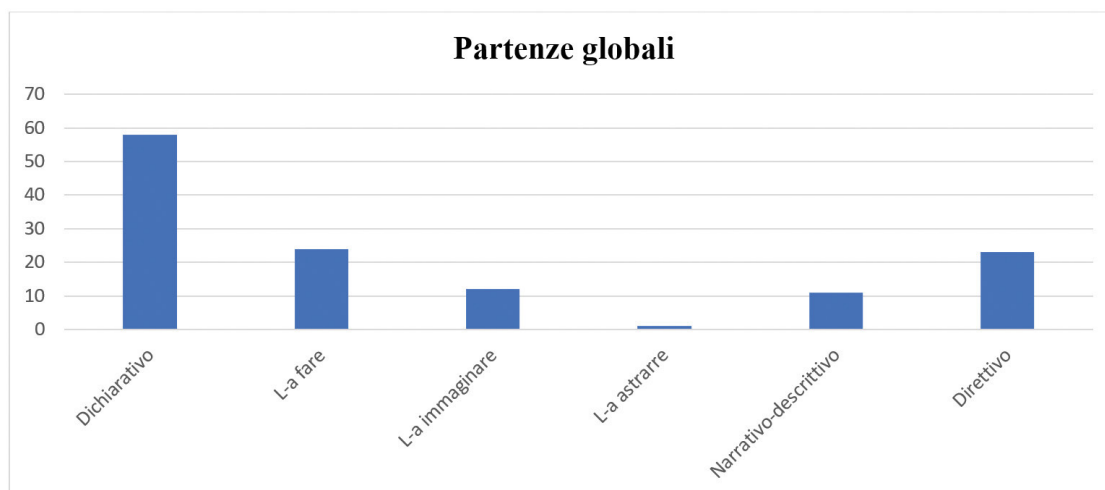


Fig. 9 – Numero assoluto dei primi macroatti distinti per tipo.

Osservando la suddivisione per anno presentata in **Figura 10**, si nota che il movimento di tipo *dichiarativo* è il più utilizzato come primo macroatto nei testi dalla IV scuola primaria (SP) in poi, con una prevalenza più netta sugli altri tipi in IV e, soprattutto, in V SP. Quest'ultimo è anche l'anno in cui la distribuzione delle partenze appare meno varia (se si esclude la III SSPG, per la quale il campione considerato è composto da soli quattro testi). In II e in III SP i tipi più frequenti sono rispettivamente il *direttivo* e il *logico-argomentativo* con la modalità di far *fare*.

L'utilizzo di questo tipo di macroatto è concentrato prevalentemente nei primi due anni considerati e si riduce progressivamente negli anni successivi, mentre le partenze di tipo *direttivo* o *logico-argomentativo* con modalità di far *immaginare* sono più equamente distribuite su tutti gli anni fino alla II SSPG. Tutti i primi macroatti di tipo *narrativo-descrittivo* tranne uno si trovano nei testi di I o II SSPG. Infine, la II SSPG è l'anno nel quale lo stile delle partenze appare più variabile, con almeno un testo per ogni tipo e differenze piccole tra le diverse frequenze.

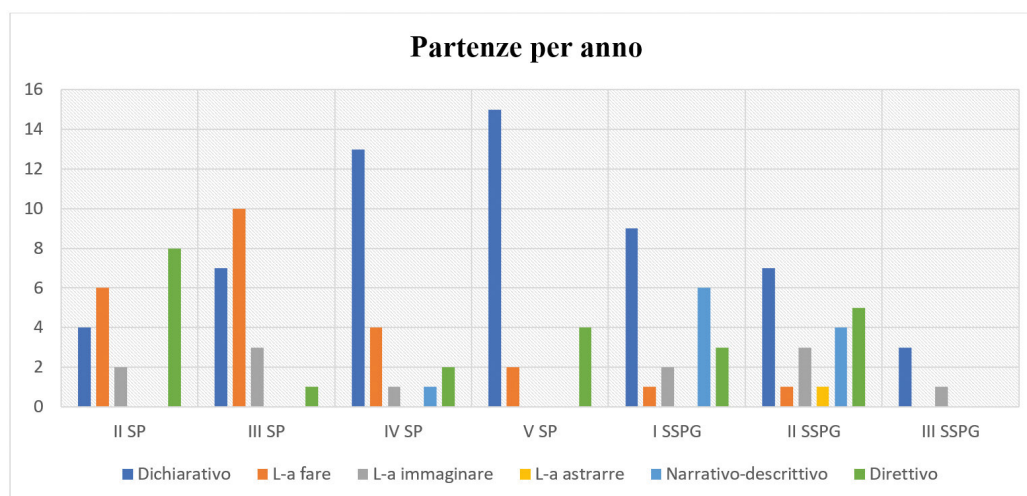


Fig. 10 – Numero assoluto dei primi macroatti distribuiti per anno e per tipo.

5.2.3.4 Le sequenze di tre macroatti consecutivi

All'interno del corpus DFA-Italmatica sono state anche osservate tutte le sequenze di tre macroatti consecutivi (per praticità chiamate "terzetti")⁷ individuabili nei testi per indagare le movenze prevalenti. Per ciascun anno scolastico è stata conteggiata la frequenza di ogni combinazione di tre macroatti presenti nei testi, tenendo conto dell'ordine in cui si presentano.

Questo tipo di analisi, oltre a fornire conferme sugli stili dei libri di testo già emersi in precedenza, consente di ricavare ulteriori informazioni sulla disposizione dei diversi tipi di macroatti, cioè su come essi si presentano più frequentemente nella composizione testuale. La scelta di considerare sequenze di tre è giustificata dal fatto che è il numero minimo che consente di effettuare osservazioni significative sulle posizioni reciproche dei tipi di macroatti; inoltre, queste sequenze racchiudono porzioni di testo che presentano generalmente una buona completezza e coerenza semantica interna: ad esempio il contenuto di un'intera pagina, che nei testi scolastici coincide spesso con la trattazione di un argomento, mentre sequenze più lunghe coinvolgerebbero, nella maggior parte dei casi, parti di testo separate tra loro (in particolare, paragrafi diversi).

Si riportano i principali risultati emersi da quest'indagine, raggruppando da una parte i testi per la scuola primaria e dall'altra quelli per la scuola secondaria di

7. Tecnicamente, si tratta di *n-grammi*, cioè «serie di *n* elementi [...] da studiare in sequenza fra loro, dove in genere *n* è una quantità inferiore a quattro o a cinque. Essi permettono di identificare importanti elementi strutturali del testo» (Bolasco, 2013, p. 53). Sono uno strumento molto utile per studiare le tipicità e le ricorrenze di un corpus.

primo grado, poiché si è osservata una notevole uniformità nei dati relativi ai diversi anni compresi in ognuna di queste categorie, salvo poche eccezioni che verranno messe in evidenza, e un cambiamento netto da un livello scolastico all'altro.

Terzetti nei testi per la scuola primaria. Il tipo di terzetto più ricorrente nei testi di scuola primaria è *direttivo – direttivo – direttivo* (circa il 10% dei terzetti); seguono diversi terzetti con combinazioni di macroatti di tipo *direttivo* e *dichiarativo*, a partire dalla sequenza *dichiarativo – direttivo – direttivo* (quasi l'8% dei terzetti). Ciò mostra la prevalenza di parti di testo che chiedono all'allievo di agire in prima persona, a seguito di una breve parte teorica, corrispondente tendenzialmente a un solo macroatto. Nel complesso, i tre tipi di terzetti formati da due macroatti *direttivi* e uno *dichiarativo* costituiscono quasi il 22% dei terzetti, quelli formati da un *direttivo* e due *dichiarativi* quasi il 19%. Si nota dunque che il tipo di macroatto maggiormente presente nei terzetti individuati nei testi di scuola primaria è il *direttivo*, coerentemente con quanto emerso dai dati relativi ai singoli macroatti.

La sequenza *dichiarativo – dichiarativo – dichiarativo* – che, come vedremo, è la più usata nei testi di scuola secondaria di primo grado – rappresenta nella scuola primaria circa il 5% dei terzetti ed è la più frequente tra quelle che non comprendono macroatti *direttivi*; segue, con circa il 3% dei terzetti, la sequenza *logico-argomentativo* di tipo *fare – direttivo – direttivo*, per la quale valgono considerazioni analoghe a quelle già esposte per il terzetto *dichiarativo – direttivo – direttivo*, con la differenza che in questo caso il sapere cui fanno riferimento le attività del secondo e terzo macroatto non viene esposto in modo assertivo, ma l'allievo è guidato a scoprirlo attraverso un'azione concreta.

Osservando la situazione per anno, si nota che nei testi di seconda primaria prevalgono le sequenze *direttivo – logico-argomentativo* di tipo *fare – direttivo* e *logico-argomentativo* di tipo *fare – direttivo – direttivo*, che rappresentano complessivamente quasi il 30% dei terzetti, mentre i terzetti *direttivo – direttivo – direttivo* e *dichiarativo – direttivo – direttivo* – i più usati nei successivi anni della scuola primaria – costituiscono in tutto circa il 14% dei terzetti relativi al II anno. Questa osservazione è in linea con il notevole ricorso che viene fatto in II primaria alla modalità *fare*, che si riduce poi sempre di più all'aumentare del livello scolastico. Dalla III primaria in poi, infatti, l'andamento dei tipi di terzetti più ricorrenti conferma quello generale presentato sopra per la scuola primaria, con il tipo *dichiarativo* che diventa sempre più presente sostituendo gradualmente il *logico-argomentativo* di tipo *fare*, con una differenza sempre più marcata di anno in anno.

Terzetti nei testi per la scuola secondaria di primo grado. Nei testi di scuola secondaria di primo grado, come anticipato, il tipo di terzetto più frequente è *dichiarativo – dichiarativo – dichiarativo*, con una netta prevalenza che si riscontra

in tutti gli anni (complessivamente, si tratta del 30% circa dei terzetti, mentre ogni altro tipo di sequenza ha una frequenza inferiore al 5%): in sostanza, il libro di testo “parla” in modo maggiormente frontale, dando al lettore delle informazioni. Le altre combinazioni più utilizzate presentano, oltre ai macroatti *dichiarativi*, un macroatto di tipo *logico-argomentativo* di tipo *astrarre*, a partire dalla sequenza *logico-argomentativo* di tipo *astrarre* – *dichiarativo* – *dichiarativo*. Questi dati sono in linea con l’osservazione che il macroatto *logico-argomentativo* di tipo *astrarre* è largamente presente nei testi per questo livello scolastico, più di qualsiasi altro, ad eccezione del *dichiarativo* soprattutto in II e III secondaria di primo grado. È interessante osservare, in particolare, che vi è anche un numero significativo di sequenze di tre macroatti consecutivi *logico-argomentativo* di tipo *astrarre*, che in questo livello scolastico rappresentano il secondo terzetto più ricorrente. Rispetto a quanto esposto fin qui, le sequenze individuate nei testi per la I secondaria di primo grado presentano qualche differenza e una maggiore varietà: mentre le prime due sequenze più utilizzate coincidono con quelle trovate nel complesso per questo livello scolastico, le successive comprendono anche il terzetto *dichiarativo* – *direttivo* – *dichiarativo* e diverse combinazioni di due macroatti *dichiarativi* e uno *logico-argomentativo* di tipo *immaginare*.

Anche l’esame delle sequenze più ricorrenti di tre macroatti conferma, in sintesi, le tendenze comunicative peculiari nei diversi ordini di scolarità, che, in modo abbastanza repentino, evolvono attraverso il tentativo di assumere i caratteri propri del discorso matematico. Ciò avviene senza che vengano considerati i naturali bisogni dei lettori, che dovrebbero essere accompagnati gradatamente a fare proprio un linguaggio specialistico non solo dotato di caratteristiche specifiche a livello disciplinare, ma anche mediato dal formato “manuale scolastico”, con le sue prassi stilistiche. Se è vero che apprendere la matematica è anche, simultaneamente, appropriarsi del suo linguaggio (comprenderlo, usarlo), allora le scelte illocutive del libro di testo sono qualcosa su cui vale la pena interrogarsi, anche nella prospettiva di esplorare nuove e più efficaci vie per la presentazione del sapere teorico.

5.3 Gli enunciati (microatti)

Dopo aver approfondito i movimenti testuali, passiamo ora al livello degli enunciati, ricordando il valore matematico (e non esclusivamente di unità linguistica) che abbiamo attribuito a essi per descriverli. In un manuale scolastico di geometria, sono infatti presenti numerosi enunciati che hanno peculiarità disciplinari e funzioni di composizione testuale diverse. Per analizzare nel dettaglio i testi, si è scelto di categorizzarli in cinque tipi distinti: *definizione*, *proposizione*, *denominazione*, *esemplificazione* e *notazione*. Queste categorie non esauriscono tutte le possibilità presenti in un libro scolastico di matematica, ma coincidono con i tipi di

enunciati più caratterizzanti; come accennato al **paragrafo 5.1**, sono ovviamente presenti anche enunciati che sono funzionali ai fini del testo nelle sue varie parti, come, ad esempio, i seguenti (**Fig. 11**, 12_2, p. 93 e **Fig. 12**, 15_3, p. 104), ma che non rientrano in nessun tipo di enunciato specifico dell'ambito della matematica:

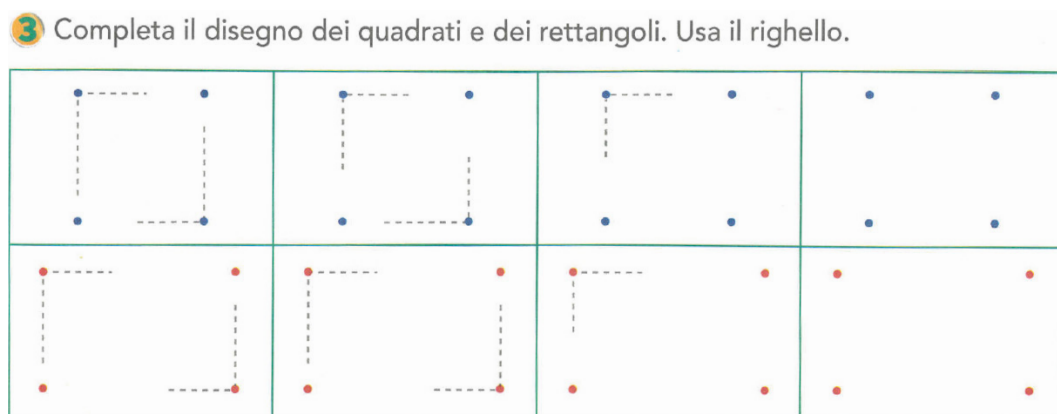


Fig. 11 – Esempi di enunciati non specifici della matematica: la consegna di un macroatto *direttivo* (II primaria).



Fig. 12 – Esempi di enunciati non specifici della matematica, ma finalizzati a orientare il lettore (III primaria).

Enunciati come quelli appena osservati nelle **Figure 11** e **12** non sono ovviamente stati annotati con un'etichetta matematica, ma sono stati conteggiati nella mappatura complessiva in quanto svolgono importanti funzioni nella costruzione e nell'articolazione globale del testo.

Al loro interno i vari enunciati possono essere costituiti da unità informative che ne gerarchizzano il contenuto: lo studio di questi aspetti verrà approfondito per alcuni enunciati tipici della testualità matematica nel **paragrafo 5.4** allo scopo di osservare la micro-organizzazione semantica dei contenuti, cioè il cosiddetto *information packaging* (A. Ferrari, 2003; Notarbartolo, 2017, p. 120).

In riferimento alla specificità del testo matematico va fatta un'ulteriore precisazione, che approfondiremo in seguito (**par. 5.3.8**): alcuni enunciati o alcune unità informative (parti di enunciato) possono esprimere più intenzioni comunicative insieme. Ciò significa che una stessa parte di testo può assumere il valore di più microatti (ad esempio può *definire*, ma anche *denominare*), risultando particolarmente densa a livello semantico e cognitivamente onerosa per chi legge.

Di seguito presentiamo le caratteristiche tipologiche dei cinque tipi di enunciati matematici individuati e annotati nel corpus.

5.3.1 Definizione

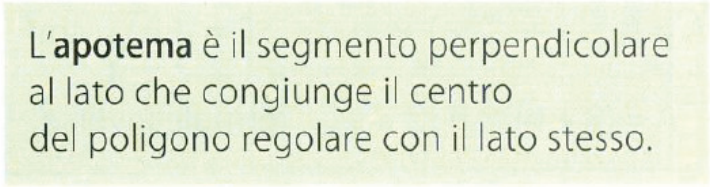
Con l'enunciato di tipo *definizione* si intende un enunciato che stabilisce il significato di una parola o di una espressione verbale mediante una frase costituita da termini il cui significato si presume già noto⁸. Caratteristica della definizione è di essere *compatta*: con poche parole si descrivono elementi che in matematica sono spesso una quantità infinita. Ad esempio, nella definizione "I rettangoli sono quadrilateri con quattro angoli retti" vengono contemplate le infinite figure che hanno questa caratteristica. "I rettangoli" è detto *definendum*, gli elementi che si vogliono definire, mentre "sono quadrilateri con quattro angoli retti" è il *definiens*, il predicato retto dal verbo *essere*, che serve a definire. Nel *definiens* non ci dovrebbero essere concetti o termini sconosciuti. Per questo in un libro di testo di matematica dovrebbero esserci delle definizioni precedenti inerenti ai singoli termini specialistici di cui si fa uso nel *definiens*: in questo caso la definizione di "quadrilateri", di "angoli" e di "retti". Questo procedimento di definire i singoli termini specialistici di cui si fa uso nel *definiens* non può andare avanti all'infinito; occorre decidere da quali termini si vuole partire in una teoria, lasciandoli privi di definizione esplicita, ma agganciandoli all'intuizione e all'esperienza precedente: scelte non sempre chiare ed evidenti nei libri di testo. Queste parole vengono dette "termini primitivi".

In ambito matematico la definizione ha sempre avuto fin da Aristotele la caratteristica di contenere solo informazioni necessarie e sufficienti, ossia di non dover risultare *ridondante*. La sinteticità e la non sovrabbondanza di informazioni peculiari delle definizioni matematiche sono tratti tutto sommato condivisi anche dal concetto di definizione in senso generale, anche se l'accento su di essi, seppure accennato, non assume le caratteristiche essenziali e assolute che ha, invece, nella definizione in senso matematico. A questa essenzialità di formato testuale (non solo stilistica, ma profondamente connaturata alle esigenze della matema-

8. Abbiamo scelto di fare riferimento alla definizione in puro senso aristotelico: *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam* («la definizione si esegue aggiungendo al genere prossimo la differenza che lo specifica», Aristotele, 1996).

tica) consegue che le definizioni presentino le informazioni in modo per lo più non gerarchizzato, in forma breve e sintetica. Per ulteriori approfondimenti su questi enunciati si vedano i **paragrafi 5.4.1 e 6.2**.

Riportiamo ora due esempi di *definizione* dai quali emergono diverse opzioni a livello di struttura informativa. Il primo esempio, tratto da un volume di V primaria (**Fig. 13**, 15_5, p. 296), segue una struttura piuttosto classica per una definizione matematica, che va dal *definiendum* (*l'apotema*, in posizione di topic⁹ e messo in risalto dal grassetto) al *definiens* (il focus informativo, che richiama contenuti che, in una definizione, dovrebbero essere noti al lettore): tale ordine in una definizione può essere considerato quello basilare e naturale, cioè “non-marcato”¹⁰.



L'apotema è il segmento perpendicolare
al lato che congiunge il centro
del poligono regolare con il lato stesso.

Fig. 13 – Enunciato di tipo *definizione* (V primaria).

Si noti poi l'uso dell'articolo determinativo e della preposizione articolata (*il segmento perpendicolare* e *al lato*), che, per quanto in italiano possano legittimamente assumere valore generalizzante¹¹, possono indurre un lettore non esperto a pensare agli elementi introdotti come se fossero unici e specifici; sarebbe forse più adatto o quantomeno semplice da interpretare il ricorso all'articolo indeterminativo “un” (*un segmento perpendicolare, con un lato*), con una riformulazione

9. Semplificando, in generale, il topic è l'elemento che si presenta come “argomento” o “tema” dell'enunciato: ciò di cui si parla, rispetto a cui l'enunciato veicola informazione (Andorno, 2005, p. 55); il focus è “ciò che si dice del topic” nell'enunciato ed è l'elemento più saliente dal punto di vista informativo (Knud, 1994). A seconda dell'ordine degli elementi nelle definizioni (prima il *definiendum* o prima il *definiens*), l'uno o l'altro possono assumere il valore informativo di topic (tema) o di focus (rema) nella struttura tematica della frase. Per la nozione di struttura tematica si rimanda a A. Ferrari (2011), mentre per un approfondimento del concetto di topic si segnala il lavoro di Chini (2010).

10. La marcatezza è un concetto linguistico basato sul confronto tra due o più forme: una forma marcata è una forma non basilare o meno naturale, mentre quella non-marcata è quella più naturale e consueta, che, nel caso delle definizioni, corrisponde all'ordine più classico degli elementi.

11. Come sostiene Grandi (2010): «L'articolo definito ha anche una funzione secondaria: marcare un nome come esponente di una intera classe, attribuendogli quindi valore generico e non referenziale».

di questo tipo: “L’apotema è un segmento perpendicolare che congiunge il centro del poligono regolare con un lato” o, ancor meglio, “un qualsiasi lato”. In particolare, la scelta dell’articolo determinativo negli elementi del *definiens* può influenzare la comprensione del bambino sulla numerosità degli apotemi: in un poligono regolare, infatti, non c’è un solo apotema (come l’articolo porterebbe a inferire), in quanto gli apotemi sono tanti quanti il numero di lati (cosa che non viene esplicitata)¹².

La struttura della seguente definizione (Fig. 14, 5_3, p. 98), è contraria rispetto alla precedente: il *definiendum* (poligono) segue il *definiens* (*La parte di piano...*), ed è così collocato nel ruolo di focus informativo, mentre *La parte di piano...* è in posizione topicale. Vi è anche una figura dal semplice valore decorativo (un autobus), che non ha alcuna attinenza con l’argomento geometrico proposto.



Fig. 14 – Enunciato di tipo *definizione* (III primaria).

In questo caso si sceglie di partire richiamando nel bambino il *definiens*, ossia ciò che già gli è (o dovrebbe essere) noto, per poi introdurre il *definiendum* (optando per la forma verbale *si chiama* e non per il verbo *essere*).

Spesso le definizioni sono in relazione con la figura, che ne fornisce degli esempi, ossia si dà un’esemplificazione degli enti attraverso il registro figurale, come nel seguente, terzo esempio (Fig. 15, 7_3, p. 95); ciò avviene soprattutto quando le varie definizioni si riferiscono allo stesso oggetto geometrico (in questo caso il *poligono*):

12. Per un approfondimento sulla rappresentazione linguistica della numerosità degli elementi si veda il **paragrafo 6.2.3**.

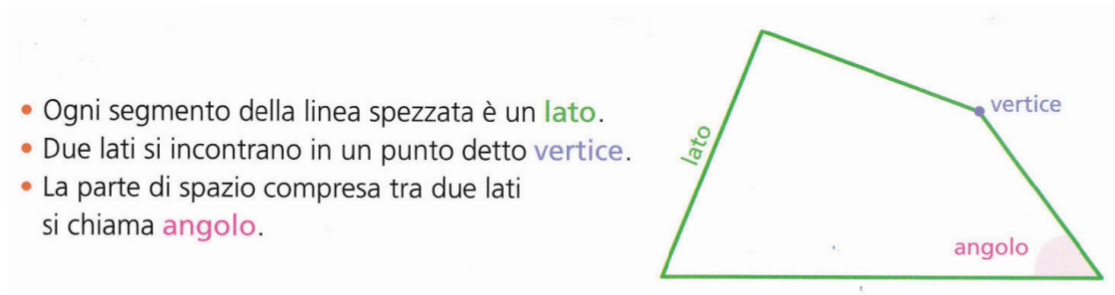


Fig. 15 – Enunciato di tipo *definizione* (III primaria).

In tutte le definizioni riportate in questo esempio il *definiendum* si trova in fondo, in posizione di focus informativo, mentre prima è presentato il *definiens*; le due parti sono legate tramite verbi con forme e con semantiche diverse: è (copula tipica delle definizioni), *detto*, *si chiama*. Si nota coerenza nell'uso del colore nella conversione tra registro linguistico e figurale (verde per lato, viola per vertice, fucsia per angolo): cosa positiva, se si considera che la conversione tra registri semiotici diversi dello stesso concetto in gioco rappresenta un aspetto importante per la sua comprensione, come ha evidenziato Duval (1993; 2017). Va però anche osservato che l'elemento *lato* non viene evidenziato nella figura come elemento singolo, come invece avviene per gli altri due enti (*vertice* e *angolo*), ma viene dato rilievo all'intero contorno.

Dal lato linguistico, a parità di collocazione finale del *definiendum*, si possono rilevare ben tre strutture morfosintattiche diverse per le tre definizioni, che presentano anche scelte lessicali differenti a livello di verbi, di aggettivi e di articoli. Gestire le diverse strutture linguistiche può essere tutt'altro che semplice, considerando che le energie cognitive del lettore dovrebbero essere per lo più impegnate a richiamare conoscenze pregresse e a integrarle col "nuovo" al fine di elaborare corrette rappresentazioni semantiche dei concetti. Pur essendo i tre enti equinumerosi (il numero di lati, di vertici e di angoli coincide in ciascun poligono), nell'esempio si sono fatte scelte differenti: per il *lato* è data una definizione che tiene conto del plurale, con l'uso dell'aggettivo indefinito *ogni* (*Ogni segmento...*), quantificatore indeclinabile che veicola l'idea di pluralità (in alternativa a *tutti*); invece, ciò non avviene per il *vertice* e l'*angolo*, le cui definizioni sono espresse al singolare tramite gli articoli indeterminativo e determinativo (il vertice è *un* punto, l'angolo è *la* parte di piano...). Tale incoerenza per quanto riguarda le modalità di rappresentazione della categoria del "numero" non facilita la comprensione da parte del lettore, che deve fronteggiare una variazione grammaticale a fronte di uno stato di cose che non lo richiederebbe, in quanto non ha corrispondenza concettuale.

5.3.2 Proposizione

L'enunciato del tipo *proposizione* ospita frasi che descrivono proprietà o relazioni tra oggetti geometrici, o scelte di impostazione strutturale, come ad esempio le classificazioni degli oggetti geometrici. Una proposizione consente di identificare i riferimenti (ciò di cui si parla) e, una volta identificati questi, può essere riconosciuta come vera o falsa.

In ambito matematico la proposizione ha genericamente una caratterizzazione molto ampia: «proposizione è un termine generico, usato spesso in matematica come sinonimo di teorema, ma usato anche in logica con un significato più vicino a quello del linguaggio naturale: qualsiasi frase a cui sia possibile attribuire un valore di verità (vero o falso), a prescindere dal fatto che si sappia o meno quale delle due circostanze si verifica» (Villani & Berni, 2003, p. 193). Con attenzione specifica al tipo di testo, poi, P. L. Ferrari (2004, p. 111) sostiene che la proposizione è «quell'aspetto del significato di un testo dichiarativo che consente di identificare i riferimenti e di stabilire se quanto è affermato è vero o falso». Va quindi precisato, riprendendo l'Ermeneutica di Aristotele (4, 17a, 2, traduzione in Blanché, 1973, p. 34), che «Non ogni discorso è una proposizione, ma solo il discorso nel quale risiede il vero o il falso, cosa che non accade in tutti i casi: così la preghiera è un discorso, ma non è né vera né falsa»; ciò vale in generale per gli atti linguistici performativi (Austin, 1962; Sbisà, 1978), che non descrivono uno stato di cose, ma che permettono al parlante di realizzare una vera e propria azione (come la preghiera, appunto, ma anche un divieto, una formula giuridica e così via). Non sono, pertanto, proposizioni.

Risulta, quindi, evidente che se dal canto suo la grammatica ha comunemente accolto un significato prevalentemente sintattico di proposizione, la semantica logica ha genericamente attribuito a essa una caratterizzazione molto ampia, come sinonimo di teorema, ma anche come una qualsiasi frase a cui sia possibile attribuire un valore di verità (vero o falso). Ciò che intendiamo qui è qualcosa di molto diverso, in quanto legato alle caratteristiche del contenuto espresso.

Riportiamo due esempi di *proposizione*, secondo la nostra classificazione, tratti entrambi da un volume per la I secondaria di primo grado (Fig. 16, 2_6, p. 214 e 5_6, p. 238).

Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso.

I triangoli assumono denominazioni diverse e possiedono determinate proprietà a seconda che vengano classificati rispetto ai lati o agli angoli.

Fig. 16 – Due enunciati di tipo *proposizione* (I secondaria di primo grado).

Dal punto di vista matematico, la prima proposizione ha un carattere di verità assai diverso rispetto a quello della seconda: la prima è dimostrabile nella geometria euclidea e quindi si avvicina all'idea di teorema, mentre la seconda è legata a una scelta classificatoria, quindi non è dimostrabile pur essendo considerata vera in quel contesto. Entrambi gli enunciati sono stati comunque considerati di tipo *proposizione* (tale tipo sarà approfondito al **par. 5.4.2**).

5.3.3 Denominazione

Con enunciato di tipo *denominazione* si intende un enunciato in cui viene attribuito un nome allo scopo di identificare l'oggetto matematico in questione. Spesso nei libri di testo di matematica la denominazione avviene nell'ambito di una definizione o di una proposizione, al fine di fornire termini di riferimento specifici all'interno della disciplina; questi termini chiariscono le caratterizzazioni e il contesto d'uso, ma rendono spesso i testi scolastici terminologicamente troppo densi per il lettore. Che la denominazione accompagni spesso la definizione risulta anche dalla citazione di Villani e Berni (2003, p. 196), che afferma che le definizioni sono «abbreviazioni linguistiche utili per caratterizzare enti matematici di uso frequente (distinti dai termini primitivi), la cui descrizione tramite i soli termini primitivi sarebbe troppo lunga. Per esempio, è assai più comodo parlare di circonferenza piuttosto che di luogo dei punti del piano che sono equidistanti da un punto dato», mettendo così in evidenza l'importanza del ricorso ai tecnicismi, ossia di attribuire un nome alle cose.

Questa tendenza all'esattezza nominale è un tratto tipico delle *lingue speciali*, caratteristica che determina, insieme al fenomeno della *nominalizzazione* cui si è fatto cenno in precedenza, l'alto numero di termini tecnico-specialistici esclusivamente settoriali (*apotema*, *ipotenusa*, *cateto* ecc.), che convivono sia con parole del lessico comune (parole sia "piene" o "lessicali", sia "funzionali" o "grammaticali", che costruiscono e legano le frasi, come avverbi, connettivi ecc.), sia con parole che, oltre a essere termini specialistici, hanno anche ampia circolazione nell'uso comune (sempre pensando alla geometria, parole come *punto* o *angolo*, dotate di una pluralità di accezioni nella lingua dell'uso; per un'indagine su queste parole, si può vedere Demartini, Fornara & Sbaragli, 2018 e Sbaragli, Demartini & Franchini, 2021). L'etichetta *denominazione*, nella nostra sistemazione, designa specificamente l'atto comunicativo di "dare un nome" a qualcosa, cioè, dal punto di vista del lettore, di attribuire a esso un'etichetta lessicale matematica.

Esempi di microatti di tipo *denominazione* sono i seguenti, tratti da un testo per la II primaria (**Fig. 17**, 5_2, p. 78):

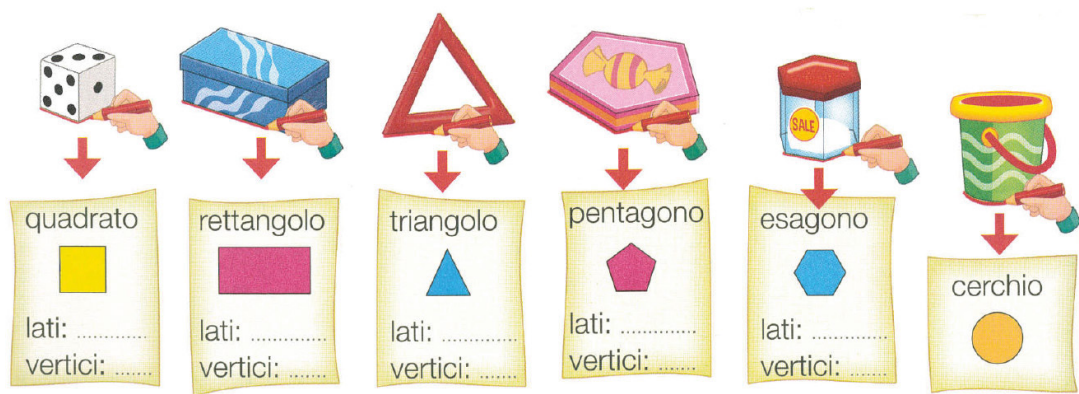


Fig. 17 – Enunciati di tipo *denominazione* (II primaria).

In questi microatti si sfruttano le impronte lasciate da oggetti reali tridimensionali per parlare di enti geometrici bidimensionali, a cui viene dato un nome e per i quali si chiede al bambino di associare il numero di lati e di vertici nel caso esclusivo dei poligoni.

Il seguente esempio, invece, è tratto da un testo per la IV primaria (Fig. 18, 2_4, p. 337):

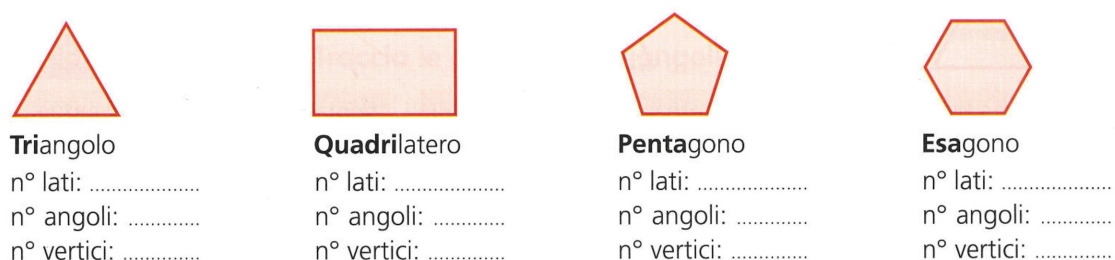


Fig. 18 – Enunciati di tipo *denominazione* (IV primaria).

I quattro enunciati sono *denominativi* poiché il fine informativo di ciascuno è quello di far apprendere il nome dei quattro poligoni: questo apprendimento dovrebbe essere rafforzato dal legame del numero degli enti (*lati*, *angoli*, *vertici*) con l'etimologia della parola, in cui la parte rilevante (i prefissoidi numerici *Tri-*, *Quadri-*, *Penta-*, *Esa-*) è enfatizzata in grassetto. Come mostra la forma linguistica e grafica, questi microatti si riuniscono, nell'insieme, in un macroatto globalmente caratterizzato da un intento *direttivo*, in quanto richiede all'allievo di inserire al posto dei puntini il numero di *lati*, *angoli* e *vertici* del poligono, cioè di agire in prima persona sul testo (sulla peculiarità degli enunciati da completare si veda il par. 5.3.6).

5.3.4 Esemplificazione

Secondo la nostra caratterizzazione dei microatti, con enunciato del tipo *esemplificazione* si intende un enunciato che presenta un caso particolare sullo sfondo di un paradigma di alternative. L'esempio, elemento pervasivo della testualità matematica, si collega sempre a un'affermazione generale che può essere esplicitamente citata nell'intorno testuale (cioè prima o dopo l'esempio stesso) o implicitamente evocata. Dal punto di vista matematico, «Usiamo l'espressione *esemplificazione* per descrivere ogni situazione in cui qualcosa di specifico è offerto come rappresentante di una classe generale con la quale lo studente deve familiarizzare» (Watson & Mason, 2005, traduzione degli autori, p. 3). Nel concreto dei testi scolastici di matematica, come vedremo al **paragrafo 5.4.3**, il microatto esemplificativo si realizza in diversi modi peculiari, interessanti da indagare in quanto diffusissimi e imprescindibili nel proporre la disciplina agli allievi. In essi le esemplificazioni possono essere espresse in linguaggio aritmetico, algebrico, naturale o figurale. Basti pensare che la figura di *un* rombo riportata su un libro rappresenta *un* esempio specifico degli infiniti elementi dell'insieme dei rombi dei quali si sta parlando.

Riportiamo in **Figura 19** un esempio di microatto *esemplificazione* tratto da un testo di I secondaria di primo grado (1_6, p. 522), in cui l'esemplificazione è espressa sia in registro linguistico sia in quello figurale, e la parte linguistica è introdotta dalla locuzione connettiva "Per esempio", che attribuisce chiaro valore esemplificativo all'enunciato e alla corrispondente figura:

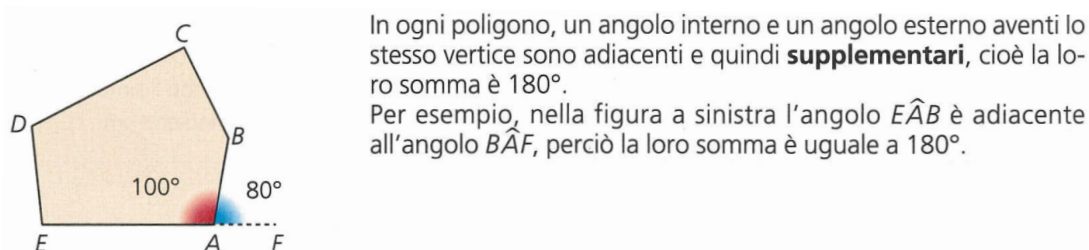


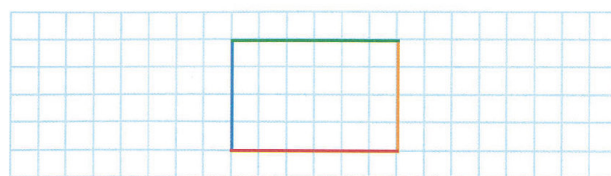
Fig. 19 – Enunciato di tipo *esemplificazione* in registro linguistico e figurale (I secondaria di primo grado).


Anche nel seguente esempio, presente in un testo di III primaria (**Fig. 20**, 9_3 p. 102), l'*esemplificazione* è espressa sia in registro linguistico sia in registro figurale:

IL PERIMETRO

Osserva e leggi

Il **perimetro** è la misura del contorno di un poligono.
Si indica con la lettera **P** e si calcola sommando le misure dei lati.



Il perimetro di questo rettangolo misura 20 lati-quadretto .

$$P = \begin{array}{ccccccc} \text{---} & + & \text{---} & + & \text{---} & + & \text{---} \\ 4 & + & 6 & + & 4 & + & 6 \\ & & & & & & = 20 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

Fig. 20 – Enunciato di tipo *esemplificazione* in registro linguistico e figurale (III primaria).

A sostenere la definizione ricordata al lettore, viene inserito un esempio di calcolo del perimetro per un particolare quadrilatero del quale sono fornite le lunghezze dei lati, esempio espresso anche in forma linguistica (box a destra), senza però che la relazione esemplificativa sia marcata linguisticamente da formule dedicate, come *per esempio, ad esempio* ecc. Significativi, dal punto di vista figurale, sono i quattro colori usati per i quattro lati del poligono che sono stati riprodotti con le relative misure e *uniti* da segni di addizione, facendo così intuire al lettore che il perimetro si ottiene tramite la somma delle lunghezze dei quattro lati, pari a 20 lati-quadretto.

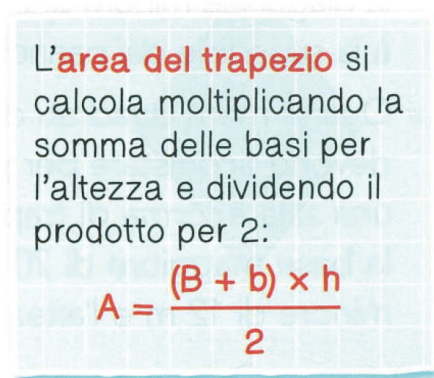
5.3.5 Notazione

Con enunciato di tipo *notazione* si intende un enunciato che comunica al lettore come si designa qualcosa, con simboli e segni rientranti nell'uso comune della matematica o scelti dalle diverse figure costruttrici di significato del testo in base ai loro obiettivi comunicativi.

In questa categoria non abbiamo contemplato la designazione tramite specifici termini linguistici, che abbiamo lasciato alla *denominazione*. Come si è detto, dato che la matematica è un particolare linguaggio, la lingua nella quale si fa matematica è un codice semiologico speciale, caratterizzato in particolare da simboli convenzionali, segni, scritture specifiche, espressioni simboliche, formule ecc. che vengono esplicitate nei libri di testo e che facciamo rientrare in questa sezione. All'interno di questa tipologia sono compresi diversi tipi di notazione: quelle che sono parte intrinseca della matematica (ad esempio la scrittura in base dieci dei numeri e la notazione frazionaria); quelle che sono usate in matematica ma hanno una funzione più convenzionale (ad esempio, un segmento può essere indicato

con due lettere maiuscole scritte una di seguito all'altra AB che indicano i due punti estremi) e quelle che fanno parte della prassi didattica o degli usi dei libri di testo ma che non sono parte della matematica o dei suoi sistemi formali o sono irrilevanti da questo punto di vista (ad esempio indicare con un archetto un angolo). Le notazioni di quest'ultimo genere hanno poca importanza dal punto di vista matematico e, in qualche caso, possono essere di ostacolo all'apprendimento (Sbaragli, 2011).

Un esempio di microatto *notazione* è il seguente, tratto da un testo di V primaria (Fig. 21, 8_5, p. 99), nel quale una proposizione viene fornita tramite dei simboli convenzionali matematici: l'intera frase ("L'**area del trapezio** si calcola moltiplicando la somma delle basi per l'altezza e dividendo il prodotto per 2: $A = \frac{(B+b) \times h}{2}$ "), dunque, è stata etichettata sia come *proposizione* sia come *notazione*:



L'**area del trapezio** si calcola moltiplicando la somma delle basi per l'altezza e dividendo il prodotto per 2:

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Fig. 21 – Enunciato di tipo *proposizione* e *notazione* (V primaria).

I due punti segnalano il confine fra le due modalità di rappresentazione di uno stesso enunciato, una volta espresso in parole e successivamente condensato in simboli, e guidano la lettura mostrando al lettore una relazione riformulativa traducibile tramite *cioè* (ossia, "ciò che hai appena letto si può anche esprimere con queste notazioni").

5.3.6 Enunciati da completare

Un'ulteriore peculiarità significativa da segnalare è che ad alcuni microatti, appartenenti ai vari tipi, è stata assegnata anche l'attribuzione "da completare": sono infatti enunciati che richiedono la collaborazione e l'azione da parte del lettore, dato che in essi occorre agire concretamente inserendo delle parole o delle parti di frasi. La loro presenza nei vari sub-corpora è quantificata ai **paragrafi 5.3.7.1 e 5.3.7.2**.

Come mostrano la forma linguistica e grafica dei seguenti esempi (Fig. 22, 4_3, p. 250) di enunciati del tipo *definizione* e *denominazione*¹³ *da completare*, in questi microatti si richiede all'allievo di inserire al posto dei puntini il numero di lati e di angoli di alcuni poligoni, cioè di agire in prima persona sul testo affinché esso sia completo:

- I poligoni con lati e angoli si chiamano **triangoli**.
- I poligoni con lati e angoli si chiamano **quadrilateri**.
- I poligoni con lati e angoli si chiamano **pentagoni**.

Fig. 22 – Enunciati di tipo *definizione* e *denominazione da completare* (III primaria).

Altri esempi di microatti da completare (Fig. 23, 17_3, p. 89) sono i seguenti quattro enunciati di tipo *proposizione*, parte di un macroatto *direttivo*:

4

Analizziamo meglio i quadrilateri. Osserva e completa.

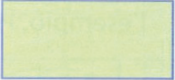
<p>QUADRATO </p> <p>Ha lati , ha angoli tutti , gli angoli sono retti.</p>	<p>RETTANGOLO </p> <p>Ha lati a due a due, ha angoli tutti , gli angoli sono retti.</p>
<p>ROMBO </p> <p>Ha lati , ha angoli a due a due.</p>	<p>TRAPEZIO </p> <p>Ha lati. Due lati opposti sono</p>

Fig. 23 – Enunciati di tipo *proposizione da completare* (III primaria).

13. Come mostrato al **paragrafo 5.3.8**, più enunciati in senso matematico (qui *definizione* e *denominazione*) possono trovarsi veicolati da un'unica porzione di testo, che assume più funzioni, comunicando, così, più informazioni assieme.

Come per il precedente esempio (Fig. 22), questi enunciati si presentano al lettore in forma di *cloze* e diventano *proposizioni* complete solo dopo l'inserimento delle parole (si auspica) giuste. In questo modo, il bambino diventa collaboratore attivo del libro di testo e della sistemazione teorica da esso proposta. Sempre del tipo *cloze* è il seguente esempio di I secondaria di primo grado (Fig. 24, 12_6, p. 236), costituito da due enunciati (una *proposizione* e una *notazione da completare*):

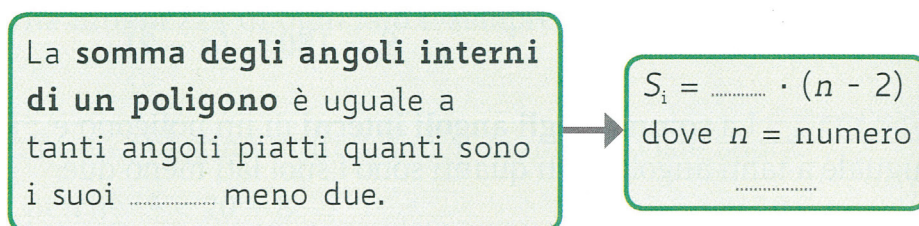


Fig. 24 – Enunciati di tipo *proposizione* e *notazione da completare* (I secondaria di primo grado).

Quest'ultimo caso mostra come i completamenti possano essere richiesti sia in parti testuali sia in formule, cioè, in questo caso, in diversi registri semiotici di rappresentazione di uno stesso concetto.

5.3.7 Dati quantitativi sugli enunciati del corpus

In analogia a quanto fatto per i movimenti testuali, anche per gli enunciati, dopo aver presentato la loro descrizione tipologica, passiamo a descrivere la distribuzione quantitativa nei testi, ossia quanto i diversi tipi siano effettivamente presenti nei libri. L'estrazione e l'elaborazione di questi dati è stata possibile grazie all'annotazione dell'intero corpus, che ha permesso di tracciare un quadro completo e preciso di "come parlano" i testi scolastici di geometria. I dati riguardano sia il corpus nel suo insieme, sia l'evoluzione nei diversi anni di scolarità, così da evidenziare eventuali differenze significative in verticale.

5.3.7.1 L'evoluzione degli enunciati nel corpus italiano

Nella **Tabella 8**, vengono riportati i dati quantitativi globali relativi alla presenza dei diversi tipi di enunciati nei libri scolastici italiani facenti parte del corpus:

Tipi di enunciato	Quantità nel corpus italiano
Definizione	3'135 (8,75%)
Proposizione	8'965 (25,01%)
Denominazione	5'191 (14,48%)
Esemplificazione	11'104 (30,98%)
Notazione	3'765 (10,51%)
Enunciato da completare	718 (2,00%)
Altri enunciati	2'962 (8,27%)
Totale	35'840 (100%)

Tab. 8 – Quantità degli enunciati nel corpus italiano espresse in forma numerica e percentuale.

Dai dati globali è possibile osservare come i testi geometrici privilegino, complessivamente, l'enunciato del tipo *esemplificazione*, che rappresenta una delle forme più efficaci per sostenere ciò che si sta presentando teoricamente in ambito matematico, soprattutto in un contesto come quello dei libri scolastici rivolti all'apprendimento. Mostrare uno degli infiniti rappresentanti a sostegno di ciò che si sta trattando, rappresenta una delle forme più solide e antiche di comprensione. Seguono poi gli enunciati di tipo *proposizione*, in cui vengono esplicitate proprietà, relazioni, scelte di impostazione, e *denominazioni*, a conferma della necessità di supportare l'apprendimento disciplinare con termini specialistici. Risulta invece meno presente l'enunciato del tipo *definizione*, che, pur essendo molto caratteristico della matematica, si presenta globalmente in percentuale minore; ciò è prevedibile se si considera che l'atto di "definire" solitamente non è che un punto di partenza o di arrivo di una più o meno ampia parte di testo. Va inoltre ricordato che il corpus è riferito al solo tema poligoni, scelto per la sua caratteristica di argomento che si presenta a spirale in diversi anni di scolarizzazione (dalla II primaria, a volte fino alla III secondaria di primo grado): ciò implica che le definizioni già fornite negli anni precedenti per gli stessi concetti, non vengono riproposte negli anni successivi, in cui si danno per acquisite (generando la densità informativa tipica del discorso matematico). I risultati sarebbero stati probabilmente assai diversi se si fossero analizzati gli interi libri di testo con la varietà degli argomenti proposti: tale analisi risulterebbe molto interessante da confrontare con i dati ottenuti dall'esplorazione del nostro corpus.

La seguente **Tabella 9** mostra, invece, l'evoluzione anno per anno della presenza dei diversi microatti:

Tipi di enunciato	Quantità corpus italiano						
	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG ¹⁴
Definizione	37 (8,83%)	152 (10,72%)	646 (10,20%)	381 (6,18%)	1'597 (11,56%)	274 (3,90%)	48 (7,21%)
Proposizione	23 (5,49%)	106 (7,48%)	1'243 (19,64%)	1'738 (28,20%)	3'096 (22,41%)	2'543 (36,17%)	216 (32,43%)
Denominazione	128 (30,55%)	352 (24,82%)	1'062 (16,78%)	678 (11,00%)	2'453 (17,76%)	439 (6,24%)	79 (11,86%)
Esemplificazione	101 (24,11%)	364 (25,67%)	1'653 (26,11%)	1'236 (20,05%)	5'291 (38,30%)	2'217 (31,54%)	242 (36,34%)
Notazione	4 (0,95%)	71 (5,01%)	607 (9,59%)	1'098 (17,82%)	743 (5,38%)	1'173 (16,69%)	69 (10,36%)
Enunciato da completare	8 (1,91%)	39 (2,75%)	191 (3,02%)	297 (4,82%)	126 (0,91%)	57 (0,81%)	0 (0%)
Altri enunciati	118 (28,16%)	334 (23,55%)	928 (14,66%)	735 (11,93%)	508 (3,68%)	327 (4,65%)	12 (1,80%)
Totale	419 (100%)	1'418 (100%)	6'330 (100%)	6'163 (100%)	13'814 (100%)	7'030 (100%)	666 (100%)

Tab. 9 – Presenza degli enunciati nel corpus italiano nei diversi anni di scolarità espressa in forma numerica e percentuale.

Come era prevedibile, essendo i libri per la I secondaria di primo grado italiani (SSPG) più lunghi e dunque più ricchi, quantitativamente, di macroatti, lo sono di conseguenza anche di microatti (13'814), con un aumento di più del doppio rispetto alla V primaria (SP) (6'163). Nell'osservare l'evoluzione degli enunciati nei vari anni si nota che l'unità *definizione* è presente prevalentemente in III SP (10,72%) e in I SSPG (11,56%), la *proposizione*, invece, è sempre molto presente a partire dalla IV SP (19,94%), con un picco considerevole in II SSPG (36,17%). Il microatto di tipo di *denominazione* è assai interessante: è presente con una percentuale assai alta (30,55%) in II SP, a testimoniare quanto sia alto il carico cognitivo dato dalla memorizzazione e dalla gestione di termini specialistici fin dai 7-8 anni, cosa che poi cala notevolmente, raggiungendo la percentuale minima in II SSPG (6,24%). Anche su questa evoluzione incide certamente il fatto che l'argomento preso in considerazione è sempre lo stesso nei vari anni, per questo, come avveniva per le *definizioni*, i termini già denominati non vengono rinominati in seguito; nella globalità dei testi

¹⁴. Come già spiegato nella nota 5 del **paragrafo 5.2.3.1**, il sub-corpus di III SSPG è meno vasto degli altri, perché riflette il minore spazio dedicato all'argomento *poligoni* in questa classe.

vi sono, però, *denominazioni* nuove per argomenti nuovi, che si presentano via via nel percorso scolastico. Come prevedibile, l'*esemplificazione* è un enunciato costantemente molto presente, soprattutto nella scuola secondaria di primo grado. L'idea, dunque, che questa forma di sostegno alla comunicazione possa calare con l'evolvere dei livelli scolastici è smentita, anzi, viene sempre più utilizzata come ancoraggio alla teoria. Come era prevedibile, l'unità testuale *notazione* aumenta con l'età: in II SP è giustamente molto limitata (0,95%) e ha i picchi massimi in V SP (17,82%), dove vengono introdotte formule soprattutto per l'individuazione di perimetri e aree, e in II SSPG (16,69%), dove queste formule vengono riprese e ampliate.

È interessante osservare che gli *enunciati da completare* sono presenti prevalentemente in IV e V SP, mentre sono quasi assenti nel livello scolastico successivo, lasciando sempre le parti teoriche realizzate interamente dall'autore del testo senza la collaborazione del lettore. Gli *altri enunciati*, che sono per lo più di collegamento tra i vari tipi di enunciati e non presentano peculiarità matematiche, sono presenti prevalentemente nei primi anni di scuola primaria (in II SP 28,16% e in III SP 23,55%) per poi calare nettamente nel livello scolastico successivo (3,68% in I SSPG, 4,65% in II e 1,80% in III). Ciò sembrerebbe mostrare una maggiore attitudine del testo per i più piccoli a presentare porzioni comunicative che si rivolgono direttamente al lettore e lo guidano nell'affrontare la lettura.

5.3.7.2 Confronto degli enunciati nel corpus italiano e nel corpus svizzero

Come emerge dal confronto globale della distribuzione delle tipologie di microatti tra il corpus italiano e i sub-corpus svizzeri: ticinese e grigionese (**Tab. 10**), si rileva una distribuzione piuttosto analoga tra l'italiano e il ticinese, che mette in evidenza tradizioni piuttosto simili nella manualistica scolastica, a parte un più significativo calo delle *proposizioni* e delle *notazioni* in Canton Ticino a favore di un aumento delle *esemplificazioni*. La differenza tra il corpus italiano e il sub-corpus grigionese risulta invece più marcata: nel sub-corpus grigionese tutti i movimenti rientranti in categorie più matematiche, come la *definizione* o la *proposizione*, lasciano il campo alle parti da noi chiamate *altri enunciati*, dove ricordiamo non rientrano aspetti specifici della matematica o estratti direttivi legati al fare. Risultano invece piuttosto presenti anche in questo sub-corpus le *esemplificazioni*. Si riportano tali considerazioni solo a titolo di curiosità, pur essendo ben consci che questi corpora a confronto solo assai diversi l'uno dall'altro, essendo riferiti a libri di livelli scolastici differenti¹⁵.

¹⁵. Ricordiamo che il corpus italiano coinvolge testi di scuola primaria e secondaria di primo grado, il sub-corpus ticinese è formato da 7 libri tutti di scuola secondaria di primo grado, mentre quello grigionese da 6 libri di testo, uno per anno di scolarità dalla II alla VI primaria, più un libro di I secondaria di primo grado, facenti tutti parte della stessa collana editoriale.

Tipi di enunciato	Quantità nel corpus italiano	Quantità nel sub-corpus ticinese	Quantità nel sub-corpus grigionese
Definizione	3'135 (8,75%)	140 (9,94%)	3 (0,84%)
Proposizione	8'965 (25,01%)	252 (17,88%)	31 (8,66%)
Denominazione	5'191 (14,48%)	231 (16,39%)	60 (16,76%)
Esemplificazione	11'104 (30,98%)	515 (36,55%)	106 (29,61%)
Notazione	3'765 (10,51%)	52 (3,69%)	1 (0,28%)
Enunciato da completare	718 (2,00%)	27 (1,92%)	1 (0,28%)
Altri enunciati	2'962 (8,27%)	192 (13,63%)	156 (43,57%)
Totale	35'840 (100%)	1'409 (100%)	358 (100%)

Tab. 10 – Quantità degli enunciati presenti nel corpus italiano e nei sub-corpora ticinese e grigionese, espressi in forma numerica e percentuale.

5.3.8 La densità dei microatti

Quello di *densità* è un concetto vario e complesso (Korzen, 2020), che può assumere diverse connotazioni e sfumature nell'ambito degli studi linguistici¹⁶: qui ci concentriamo nello specifico sulla *densità informativa* (già incontrata al **par. 2.1** a proposito dei tratti peculiari del linguaggio matematico), facendo riferimento alla definizione di Jansen (2003, p. 9), che la presenta «come il rapporto fra la quantità di informazioni che il locutore intende veicolare con il suo testo e la quantità di materiale linguistico impiegata per veicolarle».

Per quanto concerne il testo matematico per la scuola, è importante approfondire e caratterizzare la densità informativa, poiché può incidere non poco sulla complessità del testo per il ricevente. Agli elementi linguistici che la realizzano nel testo matematico (nominalizzazioni, modi verbali indefiniti, sintagmi complessi ecc.) va aggiunta un'altra componente: la pluralità di intenti comunicativi che spesso possono avere i microatti. Infatti, sebbene i microatti siano stati qui presentati uno alla volta per descriverne le peculiarità, è importante specificare che essi possono spesso essere espressi da una stessa parte di testo. Ne derivano degli enunciati

¹⁶. Si può parlare di *densità lessicale* (data, in un testo, dal rapporto fra parole piene e totale delle parole, su cui torneremo in seguito) e di *densità semantica* (che è bassa, ad esempio, nelle parole generiche come *cosa* o *fare*, mentre è elevata nei tecnicismi).

linguisticamente spesso brevi, condensati, in cui poco materiale linguistico è però informativamente ricco, in quanto più informazioni vengono proposte simultaneamente al lettore¹⁷, che spesso deve anche recuperare elementi lasciati impliciti in quanto detti in precedenza e dati per acquisiti (secondo quell'*impacchettamento informativo* descritto al **cap. 2** e al **cap. 8**). In concreto, come già anticipato, accade quindi che una stessa formulazione linguistica esprima più intenti comunicativi (ad esempio, *definire* e *denominare* insieme) e veicoli più contenuti matematici.

Vediamo un caso in **Figura 25**. Nel seguente movimento testuale *dichiarativo* tratto da un libro di IV primaria (4_4, p. 80), osserviamo tre enunciati caratterizzati dalla stessa struttura informativa interna, ciascuno da leggere insieme alla figura cui si riferisce:



Fig. 25 – La *densità* dei microatti: ogni breve enunciato ha una pluralità di intenzioni comunicative e veicola più informazioni.

Ciascun breve enunciato veicola più informazioni ed esprime gli intenti comunicativi di più microatti. In particolare, ogni enunciato in senso strettamente linguistico (“**scaleno** i lati sono tutti di lunghezza diversa”, “**isoscele** due lati hanno la stessa lunghezza” e “**equilatero** tutti i lati hanno la stessa lunghezza”), in associazione con le figure alle quali si riferisce, realizza i seguenti tre tipi di microatti matematici: *definizione*, *esemplificazione* e *denominazione*. In riferimento a un caso di triangolo scaleno, uno isoscele, infine uno equilatero, attraverso l’osservazione di figure specifiche, si forniscono i nomi e si propongono le caratteristiche che definiscono ciascun tipo di triangolo in base ai lati. Più intenzioni comunicative e più informazioni si cumulano, dunque, densamente, in brevi enunciati, cosa che

¹⁷ In Demartini, Sbaragli e Ferrari (2020) tale fenomeno è stato identificato come *annidamento* di informazioni, a rendere l’idea di più informazioni proposte non l’una dopo l’altra, ma spesso l’una nell’altra, tramite uno stesso materiale linguistico.

rende la semplicità del testo solo apparente, in quanto il lettore deve sciogliere e sistemare a livello concettuale molti contenuti.

Alla luce di questi rilievi è legittimo chiedersi come gestire questa complessità intrinseca al genere testuale e alla disciplina stessa. L'intento di queste osservazioni non è, infatti, quello di sostenere a tutti i costi una semplificazione testuale difficile da concretizzare: avrebbe senso realizzare in ogni caso più enunciati? Il testo non sarebbe dispersivo? Non ci si allontanerebbe troppo dalle caratteristiche della disciplina? Che cosa sarebbe davvero meglio per i giovani che si accostano alla matematica, senza che ne perdano le peculiarità?

Piuttosto, si vuole richiamare l'attenzione su due elementi: la complessità, spesso ignorata nei suoi aspetti più profondi, a cui sono esposti gli apprendenti; la necessità di proseguire con la ricerca in questo senso, incentrandosi maggiormente sulla comprensione degli allievi, per rendere più consapevole la didattica. Infatti, la complessità del testo non può essere affrontata (gestita o altre volte, legittimamente, evitata, ricorrendo a opportune riformulazioni) senza che i docenti ne siano consapevoli e senza che siano pronti a soffermarsi sul testo con gli allievi, osservandolo, analizzandolo in profondità, discutendo su di esso, rappresentandone i diversi piani ed elementi (che cosa dice questa breve frase matematica? Quanti contenuti veicola? Che cosa devo imparare da essa?). In questo senso si inizia a tracciare una via concreta per impostare un'educazione al discorso scientifico in chiave interdisciplinare, che richiede tempo e sforzo, ma che si presenta come via possibile e proficua per un'acquisizione disciplinare davvero profonda.

5.4 Fenomeni informativi interni ad alcuni tipi di enunciati

Data la complessità a più livelli, linguistici e disciplinari, del testo matematico (descritta al **cap. 2** e poi al **cap. 8**), vale la pena di riflettere anche su alcune caratteristiche del testo nelle sue unità basilari e su come queste possono influenzare la trasposizione dei contenuti.

Dopo aver descritto ed esplorato in modo sistematico i diversi enunciati tipici del libro di testo di matematica, è dunque interessante analizzare alcuni fenomeni caratteristici della struttura interna di quelli che, per natura semantica e per complessità, più si prestano a ulteriori analisi. I tre tipi di enunciati su cui verteranno i rilievi qualitativi dei paragrafi seguenti saranno la *definizione* (**par. 5.4.1**), la *proposizione* (**par. 5.4.2**) e l'*esemplificazione* (**par. 5.4.3**); abbiamo invece tralasciato gli enunciati di tipo *denominazione* e *notazione*, in quanto esprimono informazioni in forma estremamente sintetica e non articolata: per loro natura hanno infatti il solo fine di dare un nome o un'indicazione notazionale.

L'analisi proposta qui di seguito non mira ad avere unicamente uno scopo descrittivo. L'intento è, piuttosto, quello di osservare le unità informative che com-

pongono gli enunciati individuando alcuni aspetti dell'organizzazione interna che possono avere ripercussioni sull'elaborazione del contenuto da parte del lettore, considerando che la processazione sintattica della frase può comportare uno sforzo diverso a seconda della sua struttura (Tettamanti, 2020). In particolare, le *definizioni*, ma sovente anche le *proposizioni*, si caratterizzano per una diffusa tendenza alla *compattezza enunciativa*, che non esclude, però, interessanti considerazioni sull'ordine degli elementi e sulle scelte di gerarchizzazione, le quali, in porzioni testuali brevi, possono avere un certo impatto sul lettore; l'*esemplificazione*, invece, può presentarsi anche in forme molto articolate.

Fra i tre enunciati, si è scelto di approfondire soprattutto le *definizioni*, mettendone in evidenza particolari aspetti che si presentano anche, in parte, nei due enunciati successivi. Nelle *proposizioni* e nelle *esemplificazioni* non si riportano però tutti gli stessi elementi di analisi considerati per le *definizioni*, ma solo quelli più distintivi per questi due tipi di microatto.

5.4.1 Analisi informativa delle definizioni: una sistemazione di alcuni fenomeni significativi

In questo paragrafo si ragiona sulla forma e sull'adeguatezza linguistico-informativa delle *definizioni* del corpus, senza addentrarci in modo specifico sui diversi livelli scolastici considerati. L'analisi informativo-testuale condotta fa emergere un paradigma di fenomeni rilevanti che, a seconda dei casi, sfociano o potrebbero sfociare in problematicità, con possibili conseguenze anche sulla comprensione.

5.4.1.1 Tendenze informative: distribuzione del definiendum all'interno dell'enunciato

Come si è accennato, l'enunciato del tipo *definizione* presenta, complessivamente, una netta tendenza alla *compattezza informativa*, data dalla sua stessa natura che tende alla sintesi e all'essenzialità, sebbene, spesso, nel testo scolastico conservi alcuni elementi di ridondanza.

Nelle definizioni presenti nel corpus si riscontrano casi in cui il *definiendum* si colloca in prima posizione – vale a dire nella posizione di topic – e casi in cui esso occupa la posizione finale dell'enunciato – la posizione di focus –. Lo illustrano i due seguenti esempi, in cui “(i) poligoni” è rispettivamente topic (1) e focus (2):

- (1) I poligoni sono figure piane che hanno per confine una linea spezzata chiusa.
(11_2, p. 149)
- (2) Le figure piane delimitate da una linea spezzata chiusa non intrecciata si chiamano poligoni. (17_2, p. 85)






Non sembra esserci *a priori* una soluzione linguistico-informativa migliore dell'altra dal punto di vista dell'interpretazione o della memorizzazione. I più recenti studi di psicolinguistica e neuroscienze ribadiscono, però, che il tempo e il carico cognitivo di elaborazione della sintassi della frase (il cosiddetto «costo di processazione», Tettamanti, 2020, p. 24) sono influenzati dalle caratteristiche di disposizione delle parole e dalla maggiore o minore ambiguità eventuale del testo. Il cervello che legge deve, infatti, affrontare i contenuti che la lingua presenta in modo lineare ricostruendone l'esatta rappresentazione d'insieme e collegandoli con il resto, nel testo e al di fuori di esso (con le proprie conoscenze), effettuando un'accurata lettura di tipo intensivo.

Alla luce di ciò, dal punto di vista dell'analisi dei testi, si può considerare che una *definizione* con il *definiendum* in focus, cioè in fondo come in (2), sia più adeguata quando il *definiens* è già stato evocato nel cotesto precedente (cioè nella porzione di testo subito precedente)¹⁸. Ciò vale per l'esempio (2), che è immediatamente preceduto da una parte in cui sono rappresentate cinque figure e, attraverso una scelta multipla in cui occorre individuare una proprietà comune alle figure, si dice all'allievo che "Queste figure sono formate da una linea spezzata chiusa" (Fig. 26, 17_2, p. 85). Si nota, però, che nella definizione (2) compare anche la proprietà della linea spezzata di essere "non intrecciata"; proprietà che caratterizza i poligoni, ma che non è stata presa in considerazione nel cotesto precedente, pur essendo anch'essa comune alle cinque figure, lasciando così a chi legge il compito di ricostruire da solo questa caratteristica, che potrebbe però, a questo punto, sfuggire a un lettore non esperto. E, comunque, non è esplicitato per quale ragione tale caratteristica si aggiunga alla definizione precedentemente costruita con la scelta multipla, che accompagna il ragionamento del bambino solo in parte, per poi mostrargli una definizione con un elemento in più, che non è chiaro come sia stato ricavato.

18. Aspetto che non sempre si verifica per le *definizioni* presenti nel corpus in cui il *definiendum* occupa la posizione finale dell'enunciato – la posizione di focus.

I POLIGONI


1 Osserva le linee che formano queste figure.
Quali caratteristiche hanno in comune? Indicalo con una **X**.



Queste figure sono formate da una linea:
☐ curva aperta ☐ spezzata chiusa ☐ mista chiusa

2 Osserva le parti di cui è formato un poligono e poi completa.

vertice →



← lato

- I lati sono 
- I vertici sono 

Le figure piane delimitate da una linea spezzata chiusa non intrecciata si chiamano **poligoni**.

Fig. 26 – Esempio di *definizione* con il *definiendum* in focus (II primaria).

La disposizione della definizione (2) e la scelta del verbo portano inoltre a interpretarla come orientata a dare un'etichetta nominale (*si chiamano poligoni* invece di *sono poligoni*) a qualcosa che si suppone già noto (*Le figure piane...*). Caratteristica, questa, comune alle definizioni caratterizzate da verbi come *si chiama/-no*, *si dice/-ono* ecc. invece che dalla copula *essere*).

La definizione (1), invece, pur essendo preceduta nella pagina prima dai concetti di linee spezzate e linee miste, è posta in una sezione autonoma intitolata "Poligoni e non poligoni" (Fig. 27, 11_2, p. 149). Non stupisce, dunque, che essa cominci tematizzando il concetto di "poligoni", cioè il *definiendum*.

POLIGONI E NON POLIGONI

I **poligoni** sono figure piane che hanno per confine una linea spezzata chiusa. Le figure che hanno per confine una linea curva o mista sono **non poligoni**.

Fig. 27 – Esempio di *definizione* con il *definiendum* in topic (II primaria).

Questo tipo di ordine, che procede dal termine non noto per definirlo attraverso elementi che si presuppongono noti, è in effetti il più consueto e tipico nelle *definizioni*: lo si trova anche nei vocabolari e nelle enciclopedie, che procedono appunto dal *definiendum* al *definiens*.

La questione delle diverse strutture, delle diverse scelte di selezione del contenuto e dei vari ordinamenti informativi delle *definizioni* verrà ripresa nel **paragrafo 6.2**, nell'ottica di approfondire il formato testuale *definizione* in matematica, in particolare osservando alcuni ulteriori tratti delle *definizioni* proposte ai bambini e ai ragazzi.

5.4.1.2 Segmentazione della definizione

Spesso, nei libri di testo scolastici di matematica, le definizioni si presentano in forma di frasi composte, le cui parti sono collegate da un elemento di coordinazione sindetica (in particolare dalla *e*, che esprime una relazione di aggiunta). Se si considera che la difficoltà di lettura è aumentata dalla lunghezza di frasi e periodi (in più, densi di significato e lessicalmente impegnativi), l'idea è che, in linea di massima, ogni componente definitoria potrebbe essere calata in una sola frase semplice per facilitare la comprensione da parte del lettore, come sostengono gli studi su leggibilità e comprensibilità dei testi¹⁹. Prendiamo un caso come l'esempio (3), costruito tramite la congiunzione *e*:

- (3) La parte di piano occupata dal poligono si chiama superficie del poligono e la sua misura è l'area. (6_3, p. 85)

Sarebbe stato a nostro parere di più semplice lettura e comprensione separare i due enunciati con un punto, distinguendo le due definizioni:

- (3a) La parte di piano occupata dal poligono si chiama superficie del poligono.
La sua misura è l'area (oppure più esplicito: La misura della superficie del poligono è l'area).

¹⁹. Tale tradizione, sempre attuale, è stata avviata sull'italiano dai lavori di Tullio De Mauro sin dagli anni '70-'80, con particolare attenzione alla dimensione lessicale, e da studi come Mastidoro (2001), Piemontese (1996), Piemontese e Cavaliere (1998), Zambelli (2014), che hanno prestato attenzione anche agli aspetti morfosintattici e di densità informativa. Senza dilungarci, qui, su aspetti che toccheremo nel paragrafo dedicato alla leggibilità e alla comprensibilità (**par. 7.2**), vale la pena di ricordare come la semplicità e la linearità dei periodi, uniti a una bassa densità informativa, sono caratteristiche proprie di un testo di semplice lettura: vale quindi la pena di chiedersi in quale misura e modo i manuali delle materie scolastiche debbano pensare all'allievo agevolandone il processo cognitivo di lettura e comprensione, e quanto invece è opportuno mantengano dei tratti dei linguaggi delle discipline (questione almeno in parte sondata nei contributi raccolti in Zambelli, 1994).

Questa riformulazione potrebbe essere considerata meno complessa in termini di leggibilità, in quanto si ha corrispondenza uno a uno: a una frase semplice corrisponde una definizione; tale opzione si presenterebbe come una scelta volta a presentare al lettore unità testuali meno lunghe e più focalizzate, in luogo di diverse informazioni che si aggiungono l'una all'altra in uno stesso periodo. In questo modo si potrebbero distinguere maggiormente l'ente geometrico "superficie del poligono", dalla sua grandezza caratteristica, l'"area", che solitamente vengono utilizzati erroneamente dagli allievi come sinonimi, pur essendo concetti ben distinti in matematica (sulla confusione relativa all'uso dei termini riferiti a enti geometrici e relative grandezze si vedano il **cap. 8** e Sbaragli, Demartini & Franchini, 2021). Simili riflessioni sulla costruzione dell'enunciato (enunciati separati, enunciati contenenti congiunzioni coordinanti e così via) risultano ancora più profonde e proficue proprio se messe in relazione con la semantica che veicolano, perché permettono di volta in volta di considerare quale sia la forma linguistica più efficace per esprimere un certo contenuto disciplinare.

Questo fenomeno è piuttosto presente nei libri del corpus, come emerge anche dai seguenti due esempi, (4) e (5): in essi, alle prime parti propriamente definitorie seguono tramite congiunzioni delle proposizioni, che trattano in un caso il procedimento di calcolo per determinare l'area di un poligono e nell'altro il tipo di classificazione che si adotta per i quadrilateri. Ogni volta si otterrebbe un risultato più chiaro, dal punto di vista sia linguistico sia matematico, togliendo la congiunzione coordinante e e inserendo una pausa forte (un punto e virgola o un punto fermo) al suo posto:

- (4) L'area di un poligono è la misura (in m^2) della superficie di piano che occupa e si calcola moltiplicando lunghezza per larghezza. (4_5, p. 76)
- (5) I quadrilateri con una coppia di lati paralleli, si chiamano trapezi e possono essere classificati in base alle caratteristiche di lati e angoli. (15_5, p. 290)

Nell'esempio (5) si noti *en passant* l'inadeguatezza della virgola che separa il soggetto dalla forma verbale. Per un ulteriore approfondimento sugli aspetti sintattici e interpuntivi si veda il **paragrafo 6.3**.

Un altro caso – questa volta senza la congiunzione coordinante, ma caratterizzato dalla presenza di una virgola che scandisce debolmente – in cui ci sarebbero voluti, piuttosto, due enunciati nettamente separati da una pausa forte è il seguente:

- (6) Le figure piane che hanno come confine una linea spezzata chiusa si chiamano poligoni, tutti gli altri sono non poligoni. (18_2, p. 77)

La presenza della virgola origina un fenomeno chiamato *comma splice*, oggi molto diffuso, che letteralmente si traduce con «giunzione, assemblaggio fatto con la virgola». Qual è il problema? Il problema è che la virgola non è sempre un demarcatore sufficientemente forte e chiaro per chi legge, sebbene venga caricata di funzioni polivalenti²⁰: ne consegue un legame debole con effetto-flusso, che in qualche caso, può originare più profonde ambiguità a livello di collegamenti logici (su cui intervenire introducendo o un altro segno o un connettivo, a seconda dei casi). Nell'esempio (6), per ottenere i due enunciati, sarebbe bastato far precedere il secondo da un punto fermo, o al più da un punto e virgola, che avrebbe segnalato il confine della definizione rispetto all'ulteriore specifica (*tutti gli altri sono non poligoni*), non fondata e superflua, ma ricorrente nei libri di testo. Il sostantivo "non poligono" è infatti entrato indebitamente nel lessico matematico tipico dei libri scolastici per individuare l'insieme complementare dei poligoni all'interno dell'insieme delle figure del piano, parlando quindi di un'assenza di identità (come mostra la composizione stessa della locuzione, che inizia con *non*) invece che di *figure* e del loro sottoinsieme (ossia i *poligoni*).

Nel corpus si individua inoltre – in modo nettamente più raro – anche il fenomeno speculare. Tale fenomeno consiste nella scelta di distribuire i contenuti di un'unica definizione in due parti separate da un segno di punteggiatura forte (due enunciati in senso linguistico): una che esclusivamente denomina e una che caratterizza definendola, come si vede in (7):

(7) I seguenti poligoni sono regolari. Hanno, cioè, tutti i lati e gli angoli uguali.
(12_3, p. 89)

Le due frasi separate dal punto sono in realtà profondamente legate a livello logico, come mostra il *cioè*, e non vi sono particolari ragioni espressive per introdurre tale segmentazione in luogo di una formulazione unica, più chiara e compatta.

La soluzione più adatta e consueta in questo caso è quella individuata ad esempio in (8), in cui al posto del punto si trova una virgola, lasciando così il nome degli enti coinvolti (poligoni regolari) collegato alle sue caratteristiche:

(8) I seguenti poligoni sono regolari, hanno cioè tutti i lati e gli angoli uguali.
(5_3, p. 98)

20. Tale virgola viene anche chiamata *passe-partout*, per rimarcare l'impiego tuttofare (Ferrari et al., 2018 ; Tonani, 2010): in particolare nei testi scientifici occorre prestare attenzione al suo impiego, onde evitare rese testuali poco precise, con un maggiore carico interpretativo per il lettore.

A questo proposito, si notino due fatti. Il primo è che al posto della virgola ci sarebbero potuti stare anche i due punti, che segnalano il confine tra enunciati (denominativo e definitorio) e hanno il compito di funzionalizzare il secondo segmento alla interpretazione del primo, di cui è una spiegazione. Il secondo fatto è che nella formulazione (7) la presenza del punto è stata probabilmente “trasciata” dalla coppia di virgole che racchiude il connettivo *cioè*. In definizioni così brevi e sintatticamente semplici non c’è nessuna ragione di isolare il connettivo tra due virgole.

5.4.1.3 Articolazione logica della definizione

Dall’analisi del corpus è emerso che quando sono presenti connettivi all’interno delle definizioni sono solitamente di due tipi: i connettivi riformulativi-esplicativi *cioè* o *ossia*, e il connettivo consecutivo *quindi*. Quest’ultimo a volte è usato in modo improprio dal punto di vista matematico. Per esempio, nel testo seguente,

- (9) Poligoni che occupano la stessa superficie, e quindi hanno la stessa area ma forme diverse, si chiamano equiestesi. (18_3, p. 106)

malgrado l’indicazione che dà il connettivo, non è affatto vero che da “i poligoni che occupano la stessa superficie” si può dedurre logicamente che “hanno la stessa area ma forme diverse”, dato che possono essere anche congruenti.

Tra gli usi non pienamente giustificati di *quindi* c’è, ad esempio, anche quello del caso seguente:

- (10) Il quadrato è un parallelogramma avente tutti i lati congruenti e gli angoli retti e quindi congruenti; essendo equiangolo ed equilatero è un poligono regolare. (9_6, p. 172)

Qui il connettivo *quindi* introduce una componente ragionativa supplementare all’interno di una definizione – che potremmo esprimere con “se gli angoli sono retti sono per forza congruenti” – che in questa definizione non era affatto necessaria; sarebbe bastato dire:

- (10a) Il quadrato è un parallelogramma avente tutti i lati congruenti e gli angoli congruenti; essendo equiangolo ed equilatero è un poligono regolare.

Si noti inoltre la scelta stilistica e non del tutto felice del participio presente *avente* e del gerundio *essendo* (modi verbali indefiniti ricorrenti nel discorso ma-

tematico, che, per loro stessa natura, non rendono immediata la comprensione²¹), così come la mancanza della virgola dopo la subordinata (dopo *equilatero*), che avrebbe demarcato più efficacemente le unità che compongono la definizione.

Sempre riguardo ai connettivi, vanno menzionati anche i casi in cui un connettivo sarebbe stato il benvenuto in quanto avrebbe potuto eliminare ogni ambiguità relativa alla articolazione logica interna dell'enunciato. Uno di questi è il seguente:

(11) I poligoni sono figure piane delimitate da una linea spezzata chiusa, non intrecciata. (15_5, p. 287)

La riformulazione con il connettivo *e* in luogo della virgola a inaugurare l'ultimo sintagma della definizione mostrerebbe in modo trasparente che *non intrecciata* non sta in un rapporto sinonimico con *spezzata chiusa*:

(11a) I poligoni sono figure piane delimitate da una linea spezzata chiusa e non intrecciata.

Dal punto di vista matematico, un effetto analogo a livello informativo e che trasmette le caratteristiche della linea spezzata in modo simultaneo si sarebbe ottenuto senza mettere nulla (*linea spezzata chiusa non intrecciata*), scelta spesso attuata dai libri di testo:

(11b) I poligoni sono figure piane delimitate da una linea spezzata chiusa non intrecciata.

Esattamente lo stesso ragionamento si applica all'esempio seguente:

(12) Un poligono è una figura geometrica piana, delimitata da una linea spezzata chiusa, non intrecciata, che racchiude uno spazio. (1_5, p. 309)

Qui l'esito della mancanza della congiunzione *e* è ancora più delicato, perché la lingua mette in scena *non intrecciata* come se fosse un inciso, dunque come un'informazione in secondo piano e che si potrebbe omettere, ma che è invece matematicamente indispensabile. Anche in questo caso, si sarebbero, piuttosto, potute omettere tutte le virgole della definizione.

21. Ad esempio *essendo* deve essere correttamente interpretato (sciolto, spaccettato) come *poiché* è, ma potrebbe anche essere legittimamente inteso con altri valori, come quello restrittivo di *quando* è: non vi sono infatti segnalatori linguistici che guidano l'interpretazione, nei modi indefiniti.

Nel caso seguente (13), per lo stesso tipo di motivo, prima dell'ultimo costituente sarebbe benvenuto il connettivo *cioè* (introdotto nella riformulazione che segue, 13a),

(13) Osserva: un poligono equilatero ha tutti i lati uguali, della stessa lunghezza.
(11_3, p. 74)

Ossia, sarebbe stato più chiaro ed efficace scrivere:

(13a) Osserva: un poligono equilatero ha tutti i lati uguali, cioè della stessa lunghezza.

Ciò perché il *cioè* renderebbe chiaro, in quanto esplicito, il legame logico di spiegazione dell'"uguaglianza": cosa che potrebbe aiutare non poco una comprensione immediata e non ambigua.

5.4.1.4 Gerarchizzazione delle informazioni: il caso degli incisi

Come abbiamo già visto nell'esempio (12), nelle definizioni del corpus vi sono delle unità informative che si collocano sullo sfondo comunicativo dell'enunciato, pur essendo informazioni che andrebbero in primo piano. Questa soluzione è benvenuta quando tali unità svolgono effettivamente un ruolo secondario ai fini della definizione che viene proposta, ma ciò avviene raramente nelle definizioni matematiche che hanno la caratteristica di essere concise ed essenziali. In alcuni casi rilevati sarebbero state più indicate soluzioni linguistico-informative diverse. Vediamo, a questo proposito, l'esempio seguente:

(14) Le figure che hai colorato, cioè quelle che hanno per confine una linea spezzata chiusa, sono poligoni. (7_2, p. 80)

Costruito in questo modo, l'enunciato presenta come secondaria un'informazione che in una definizione dovrebbe stare in primo piano: "cioè quelle che hanno per confine una linea spezzata chiusa". Una soluzione linguistica migliore, che lascia invariati lingua e contenuto, potrebbe essere la seguente, che però porta a dividere in due frasi la definizione:

(14a) Le figure che hai colorato hanno per confine una linea spezzata chiusa.
Queste figure sono poligoni/si chiamano poligoni.

Per ovviare alla suddivisione della definizione in due parti informative distinte, separate dal punto, si sarebbe potuto formulare il contenuto nel seguente modo, riportando due volte il sintagma "linea spezzata chiusa":

(14b) Le figure che hai colorato hanno per confine una linea spezzata chiusa. Le figure che hanno per confine una linea spezzata chiusa sono poligoni/si chiamano poligoni.

Malgrado quanto si possa pensare a prima vista, non andrebbe bene neppure una soluzione che inverte il primo piano e lo sfondo come nel seguente caso (14c):

(14c) Le figure che hanno per confine una linea spezzata chiusa, cioè quelle che hai colorato, si chiamano poligoni.

Questo perché è opportuno che *Le figure che hai colorato* abbia nella definizione una funzione di topic, come in (14), (14a) e (14b), cioè che occupi il primo posto nell'enunciato: quando legge la definizione, l'allievo ha appena colorato i poligoni ed è quindi pragmaticamente adeguato agganciare così la parte definitoria.

Vediamo ancora la seguente definizione:

(15) I poligoni che, pur avendo forme diverse, hanno lo stesso perimetro si dicono isoperimetrici. (17_3, p. 90)

La situazione è qui ancora più delicata perché l'inciso (*pur avendo forme diverse*) intrattiene con l'unità in primo piano (*I poligoni che hanno lo stesso perimetro si dicono isoperimetrici*) una relazione concettualmente complessa come la concessione e ha la forma di una subordinata implicita (*pur avendo*), che non è detto che i lettori sappiano interpretare correttamente. Va considerato, oltretutto, che, nella parte che precede la definizione, in questo libro di testo non si parla esplicitamente delle forme diverse dei poligoni: questo fatto è mostrato semplicemente tramite un gruppo di quattro figure (**Fig. 28**, 17_3, p. 90), dal quale può emergere tale aspetto.

IL PERIMETRO

La misura del contorno di un poligono è il suo **perimetro** e si calcola addizionando la misura di tutti i lati.



$$\text{pink} + \text{green} + \text{blue} + \text{orange} = \text{perimetro}$$

- 1** Disegna per ciascun poligono un segmento la cui lunghezza sia uguale al perimetro della figura. Il lato di un quadretto è l'unità di misura. Segui l'esempio. Poi rispondi.

unità di misura _____

A = _____

B = _____

C = _____

D = _____

- Quale poligono ha il perimetro maggiore?
- Quale poligono ha il perimetro minore?
- Quale poligono ha il maggior numero di lati?
- Ci sono poligoni che hanno lo stesso perimetro?
- Quali?

I poligoni che, pur avendo forme diverse, hanno lo stesso perimetro si dicono **isoperimetrici**.

Fig. 28 – Esempio di *definizione* (box arancione) con un inciso che porta informazioni in secondo piano (III primaria).

Una formulazione più adeguata di (15) potrebbe essere questa:

(15a) I poligoni che hanno lo stesso perimetro si dicono isoperimetrici. Possono essere isoperimetrici anche poligoni che hanno forme diverse.

Troviamo un inciso problematico anche nella seguente definizione:

(16) Le figure che hanno come contorno una linea curva, o mista, chiusa si chiamano non poligoni. (c4_2, p. 63)

Qui la densità informativa tipica della lingua della matematica si intreccia con una formulazione linguistica complessa e ambigua: la qualificazione “chiusa” si lega solo a “linea curva” o a “linea curva o mista”? Per migliorare il testo, potrebbe non bastare togliere le virgole (16a), in quanto ci sarebbe comunque il rischio che l’aggettivo “chiusa” fosse interpretato come se si riferisse solo a “mista”:

(16a) Le figure che hanno come contorno una linea curva o mista chiusa si chiamano non poligoni.

Già da questa formulazione emerge come sia insensato definire la negazione di un oggetto matematico, il *non poligono*: definizione che risulta, del resto, matematicamente non necessaria. Il problema generale di formulazioni come quelle viste è duplice: incassano informazioni della definizione, presentandole come secondarie, pur essendo informazioni di primo piano; incassano informazioni sovrabbondanti per le definizioni (quindi non necessarie) o addirittura definizioni dentro a definizioni, appesantendo così il costo dell’interpretazione.

La formulazione seguente, ad esempio, è troppo densa, in quanto si evocano, fra parentesi, il triangolo equilatero e il quadrato, che però non sono né nominati né proposti in forma di figura nella sezione in cui si trova la definizione:

(17) In ogni poligono regolare (compresi il triangolo equilatero e il quadrato) è sempre possibile trovare un centro, cioè un punto equidistante dai vertici. (c3_5, p. 324)

Una parentetica inserita in una definizione (*compresi il triangolo equilatero e il quadrato*) ostacola la linearità della lettura e non è il luogo ideale né per ricordare qualcosa che è stato detto ad ampia distanza né per proporre un’unità informativa che potrebbe “andare da sé”. Si noti peraltro che se si fosse già detto in precedenza che il triangolo equilatero e il quadrato sono poligoni regolari e hanno un punto equidistante dai vertici, sarebbe stata meglio la soluzione linguistica (17a), con il

collegamento alla sezione precedente posto all'inizio dell'enunciato in posizione di "quadro" (cioè in posizione funzionale a interpretare l'informazione che viene dopo, la più importante):

(17a) Come nel triangolo equilatero e nel quadrato, anche in tutti gli altri poligoni regolari è sempre possibile trovare un centro, cioè un punto equidistante dai vertici.

L'informazione-quadro iniziale avrebbe connesso la definizione che si sta presentando con le definizioni precedenti.

Un altro caso di eccessiva densità derivante dalla riformulazione di un concetto presentato, che porta a impacchettare definizioni dentro a definizioni, è il seguente:

(18) La misura della parte di piano occupata da un poligono, cioè la misura della sua superficie, si chiama area. (17_3, p. 92)

Nel testo che precede non viene mai presentato il concetto di *misura della superficie*, che compare invece qui: all'allievo sono dunque date due definizioni incassate una nell'altra, la seconda delle quali (*cioè la misura della sua superficie*) è presentata in forma di inciso come secondaria; scelta che si potrebbe considerare se, almeno, la definizione in inciso fosse già stata asserita in precedenza. Ad ogni modo, il testo si presenta come troppo denso e impacchettato, almeno per un lettore di III primaria, per il quale c'è da chiedersi quanto questo tipo di formulazioni siano efficaci nella costruzione dei concetti disciplinari.

Nel caso seguente, invece (19):

(19) La bisettrice di un triangolo, relativa a un angolo, è il segmento che unisce un vertice con il lato opposto e divide a metà l'angolo da cui esce. (11_7, p. 16)

non è tanto una questione di densità informativa a entrare in gioco, ma di organizzazione morfosintattica del *definiendum* (*La bisettrice di un triangolo, relativa a un angolo*), che potrebbe essere presentato con una formulazione più immediata e chiara come la seguente (senza commentare dal punto di vista matematico la scelta discutibile di considerare una bisettrice come un segmento invece di una semiretta):

(19a) In un triangolo, la bisettrice di un angolo è il segmento che unisce un vertice con il lato opposto e divide a metà l'angolo da cui esce.

Prima si inquadra l'ambito di riferimento (*In un triangolo*), poi si introduce il *definiendum* (*la bisettrice di un angolo*), successivamente definito.

5.4.1.5 L'inquadramento delle definizioni

Come appena proposto nella riformulazione (19a), un enunciato può essere aperto da un elemento che tecnicamente prende il nome di *costituente circostante*. Questo può avere due obiettivi informativi: specificare l'ambito concettuale di validità della definizione o collegare la definizione al conteso precedente, cioè a quanto è stato detto in precedenza. L'esempio seguente illustra il primo obiettivo:

- (20) Tra due poligoni con diversa superficie, il poligono con l'estensione maggiore si dice prevalente, quello con l'estensione minore si dice suvvalente.
(7_7, p. 103)

Il costituente *Tra due poligoni con diversa superficie* specifica infatti il quadro concettuale all'interno del quale valgono le due definizioni susseguenti, guidando e orientando da subito l'attenzione del lettore.

Un esempio del secondo obiettivo è il seguente, dato che l'elemento-quadro che apre la definizione seguente ha una funzione di connessione con quanto precede:

- (21) Come nei triangoli, anche nei quadrilateri l'altezza è il segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento, cioè la base. (2_4, p. 341)

In una sezione precedente del libro si era effettivamente e ampiamente parlato dell'altezza dei triangoli, dunque ha senso istituire un'analogia iniziale.

Il seguente esempio è invece un po' diverso dal precedente, in quanto la parte di testo *Fra tutti i trapezi* non è solo favorita dal fatto che nel libro, in precedenza, si era parlato di trapezi e lì si era mostrati anche in modo figurale insiemistico, ma risulta anche indispensabile matematicamente per costruire questa definizione; questa informazione-quadro sembra quindi non solo avere una funzione di collegamento testuale, ma anche essere parte integrante della definizione.

- (22) Fra tutti i trapezi, alcuni si chiamano parallelogrammi: sono quelli che hanno tutte e due le coppie di lati paralleli. (3_4, p. 332)

Anche nel caso dell'informazione-quadro, ci sono dunque scelte che vale la pena di discutere.

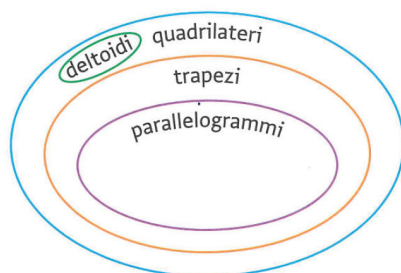
È strana, perlomeno a prima vista, la definizione seguente, in cui il termine tecnico *deltoide* (che è anche il *definiendum*) fa parte di un elemento-quadro di tipo finale (*Per essere deltoide*, cioè, “al fine di essere considerato un deltoide”):

(23) *Per essere deltoide*, un quadrilatero deve avere i lati consecutivi congruenti e i lati opposti non paralleli. (14_6, p. 714)

Se la si contestualizza, si capisce però che tale struttura è “trascinata” dalla definizione precedente (Fig. 29, 14_6, p. 714). Questa (*Per essere quadrilatero, infatti, un poligono deve avere semplicemente quattro lati*) è costruita in modo ragionativo, come mostra la presenza del connettivo *infatti*, che la collega alla parte di testo precedente:

La classificazione dei quadrilateri

Per studiare i quadrilateri siamo partiti da quelli generici, cioè da quelli che hanno il minor numero di proprietà, e siamo arrivati al quadrato, il quadrilatero regolare, che le presenta tutte.



Per essere **quadrilatero**, infatti, un poligono deve avere semplicemente quattro lati.

Per essere **deltoide**, un quadrilatero deve avere i lati consecutivi congruenti e i lati opposti non paralleli.

Per essere **trapezio**, invece, un quadrilatero deve avere una coppia di lati paralleli.

Per essere **parallelogramma**, un trapezio deve avere anche l'altra coppia di lati paralleli.

Fig. 29 – Definizioni in cui il *definiendum* si colloca nell'elemento-quadro iniziale (*Per essere...*), (I secondaria di primo grado).

Ora, capito – contestualmente – il senso di una simile struttura linguistica, in cui il *definiendum* (*deltoide*) è inserito in una subordinata finale implicita (*Per essere un deltoide...*), resta tuttavia da chiedersi fino a che punto sia una strategia davvero adeguata denunciare in modo così esplicito il ragionamento sotteso alla costruzione delle varie definizioni. Una strategia di questo tipo aiuta davvero la comprensione e la memorizzazione da parte dell'allievo? Va però sottolineato che le definizioni riportate in questo esempio sono state riprese in questa porzione di testo allo scopo di mostrare la classificazione insiemistica, ma erano già state fornite in precedenza. Ad esempio, poche pagine prima, si trova la definizione di *deltoide*

formulata con una struttura linguistica più classica; questa conteneva, rispetto alla successiva, informazioni diverse (*ma non ha tutti i lati congruenti* rispetto a *i lati opposti non paralleli*) pur essendo matematicamente equivalenti:

(24) Un **deltoide** è un quadrilatero che ha due coppie di lati consecutivi congruenti (ma non ha tutti i lati congruenti) (14_6, p. 710).

Fornire definizioni di uno stesso oggetto geometrico formulate in modo diverso, pur essendo matematicamente equivalenti, risulta sicuramente utile al fine della comprensione dei concetti in gioco, ma ci si può chiedere se tale scelta può essere colta dagli allievi, dato che non viene esplicitata nel testo e vi sono alcune pagine tra una definizione e l'altra.

5.4.1.6 Riprese anaforiche

Si sa che nei testi scientifici – anche nei manuali scolastici –, per riprendere un concetto è meglio ripetere il termine piuttosto che riferirsi a esso con un pronome o un soggetto nullo (sottinteso, lasciato implicito). È una questione di chiarezza. Quello seguente è un esempio in cui la scelta di un soggetto sottinteso (in *Ha quattro angoli uguali e retti*) non è del tutto felice, in quanto il suo antecedente, il soggetto, non si trova nell'enunciato adiacente ma in quello ancora precedente (*Il quadrato...*):

(25) Il quadrato ha quattro lati uguali. I lati opposti sono paralleli. Ha quattro angoli uguali e retti. (7_4, p. 276)

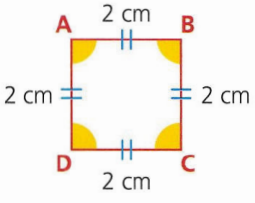
Una soluzione – del tutto coerente dal punto di vista matematico – è scambiare l'ordine del secondo e del terzo enunciato per mantenere più vicino al verbo (*Ha*) il soggetto (*il quadrato*), esplicitato solo nel primo enunciato, agevolando così la gestione dell'ellissi del soggetto e dunque la lettura e la comprensione:

(25a) Il quadrato ha quattro lati uguali. Ha quattro angoli uguali e retti. I lati opposti sono paralleli.

La definizione (25) rimane comunque una scelta definitoria inefficace per il *quadrato*. In tale definizione non si dice di che cosa si sta parlando, ossia di un *quadrilatero*, e si esplicita solo un elenco di proprietà (segnalate anche sull'immagine di un quadrato, **Fig. 30**, 7_4, p. 276), che non bastano però per definirlo propriamente a livello linguistico. *Il quadrato ha quattro lati uguali* potrebbe infatti essere un poligono di otto lati di cui solo quattro uguali e quattro angoli uguali e retti, e dedurlo solo da una figura che rappresenta un caso specifico è certamente riduttivo.

QUADRATO

Il **quadrato** ha quattro lati uguali. I lati opposti sono paralleli. Ha quattro angoli uguali e retti.



- Il perimetro del quadrato si calcola sommando le misure dei quattro lati: $P = l + l + l + l$
- Considerando che i lati del quadrato sono uguali, il perimetro si può anche calcolare così: $P = l \times 4$

$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ oppure $P = l \times 4$
 $P = 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \text{ cm}$ oppure $P = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$

Fig. 30 – Esempio di *definizione* inefficace di quadrato (IV primaria).

5.4.2 Analisi informativa delle proposizioni: una sistemazione di alcuni fenomeni significativi

Dopo aver affrontato la strutturazione informativa degli enunciati con funzione di *definizione*, ci si occupa qui di quella degli enunciati con funzione di *proposizione*, che descrivono proprietà di oggetti geometrici o relazioni tra di essi. Non si tratta in questo caso di proporre una sistemazione globale di tutti i fenomeni osservati, ma di presentare alcune considerazioni generali, che tengono sullo sfondo quanto visto rispetto alle *definizioni*, dato che molti dei fenomeni rilevati sono comuni a entrambi gli enunciati.

5.4.2.1 Tendenze informative: compattezza e articolazione

La caratterizzazione matematicamente molto ampia dell'enunciato *proposizione* nei libri di testo, di cui si è parlato al **paragrafo 5.3.2**, ha ricadute anche sull'*organizzazione informativa*. Come esplicitato nel **paragrafo 5.4**, come gli enunciati *definizione*, anche gli enunciati di tipo *proposizione* in matematica tendono in genere a essere informativamente compatti, anche se si riscontra una maggiore varietà di formati soprattutto nel progredire dei livelli scolastici.

I seguenti casi (tratti da testi per classi diverse, in verticale) sono esempi di *proposizioni* che presentano una struttura informativa semplice e compatta, analoga a quella delle definizioni, anche se meno rigida: vi sono comunque un topic (ciò di cui si parla) e un focus (ciò che si dice del topic), secondo una modalità ricorrente e familiare al lettore.

(1) La misura del perimetro è la somma delle misure dei lati della figura. (3_2, p. 83)

(2) Un poligono regolare ha tanti assi di simmetria quanti sono i suoi lati. (3_4, p. 328)

(3) La somma di un angolo interno e di un angolo esterno con lo stesso vertice misura 180° . (13_6, p. 190)

Per quanto concerne la varietà di formati, mentre la *definizione* è un enunciato matematico molto stabile, nella *proposizione* vi sono anche alcuni movimenti informativi che si discostano da tale stile testuale, proponendo più modi di articolare i contenuti. Ciò si realizza tramite una maggior presenza di unità informative interne e attraverso l'individuazione di relazioni logiche espresse da una gamma più vasta di connettivi (ricorrenti sono *perciò* e *quindi*); questo porta, in alcuni casi, a interrogarne l'adequatezza, cioè a chiedersi se quello proposto sia il modo più efficace per organizzare e veicolare il contenuto. Così, per esempio, ha davvero un senso la parentetica che compare nel seguente esempio (*e viceversa*)? Non sarebbe meglio lasciare l'indicazione fuori parentesi?

(4) In altri termini: se due angoli di un triangolo sono disuguali, all'angolo maggiore sta opposto il lato maggiore (*e viceversa*). (c2_6, p. 140)

È particolare anche l'osservazione quadro iniziale (*per quanto sappiamo*): non vale forse per tutte le definizioni e proposizioni?

(5) Per quanto sappiamo, un triangolo si può sempre inscrivere in una circonferenza, in esso infatti è unico il circocentro. (9_7, p. 100)

Analogamente, nelle *proposizioni* possono trovare spazio in modo più elastico richiami al lettore prima dell'enunciazione della proprietà (come informazione quadro iniziale), cosa che non capita di trovare nelle *definizioni*; ciò accade per esempio in (6) con *Come puoi notare*:

(6) Come puoi notare, i poligoni regolari hanno tanti assi di simmetria quanti sono i lati. (11_5, p. 324)

In alcuni casi, soprattutto via via che si fanno più articolate, nelle *proposizioni* è possibile osservare, anche se non di frequente, la presenza di informazioni in inciso: tecnicamente, queste si trovano per chi legge sullo sfondo (cioè in secondo piano) rispetto al resto dell'enunciato, dunque ai fini della costruzione concettuale non è irrilevante il contenuto che si colloca in questa posizione. Per quanto si è potuto osservare, nelle *proposizioni* l'inciso può servire a collegare due informazioni offerte dal testo, spingendo il destinatario a fare raffronti, come in (7):

(7) Il rombo, come il quadrato, è un poligono equilatero, quindi per calcolarne il perimetro basta moltiplicare la misura del lato per 4. (10_4, p. 327)

O a riprendere e richiamare supplementi di spiegazione come in (8):

(8) Il perimetro del quadrato, cioè la misura del contorno, si calcola moltiplicando la misura del lato per il numero dei lati (9_5, p. 355).

5.4.2.2 L'articolazione logico-argomentativa interna: le frasi complesse

Rimanendo nel quadro delle osservazioni proposte nel paragrafo precedente, è significativo osservare che la movimentazione logico-argomentativa dell'enunciato di tipo *proposizione* emerge quasi esclusivamente nei sub-corpora dalla IV primaria in poi. Tale differenza è meno visibile per quanto concerne le *definizioni*, che si mantengono più stabili al crescere della scolarità. Questo è dovuto certamente alla natura concettuale più semplice dei contenuti matematici dei volumi dei primi due anni della primaria, ma nasconde forse anche la volontà di non complicare inutilmente la materia e la lingua per i lettori più giovani.

A proposito di lingua, si osservi che nei libri di testo di II e III primaria, a fronte di una grande compattezza e semplicità enunciativa, vi sono solo alcuni esempi di *proposizioni* presentate in forma di frasi complesse, come le seguenti:

(9) Per calcolare la lunghezza del perimetro bisogna sommare la lunghezza di tutti i suoi lati. (14_2, p. 98)

(10) Per calcolare il perimetro addiziona la misura dei suoi²² lati. (3_3, p. 73)

(11) Per calcolare il perimetro del poligono somma le misure di tutti i suoi lati. (14_3, p. 107)

(12) Per calcolarla [l'area] si sceglie come unità di misura una figura piana, poi si conta quante ne occorrono per ricoprire la superficie da misurare. (4_3, p. 252)

Il contenuto della subordinata finale²³ implicita (*Per calcolare*), formata da "per" + verbo all'infinito, ha un valore per così dire metatestuale: non ha, cioè, un vero valore matematico, bensì un valore di composizione interna del testo, che propone il contenuto della *proposizione* collegandolo a una finalità pratica propriamente scolastica (espressa o all'imperativo o in forma impersonale). Si sarebbe benissimo potuto dire:

22. Si è riportato in modo fedele l'errore di ortografia presente nel libro di testo (3_3, p. 73).

23. È una subordinata di tipo *finale* in quanto esprime il fine, l'obiettivo al quale è rivolta la frase reggente: in questo caso, il fine è *calcolare*.

- (9a) La lunghezza del perimetro è data dalla somma della lunghezza di tutti i suoi lati.
- (10a) Il perimetro si calcola addizionando la misura dei suoi lati.
- (11a) Il perimetro del poligono è dato dalla somma delle misure di tutti i suoi lati.
- (12a) L'area si calcola scegliendo come unità di misura una figura piana [...].

Simili frasi, che potremmo qualificare come "non marcate" (A. Ferrari, 2012) – ossia non caratterizzate da fenomeni particolari di enfasi o di dislocazione di elementi –, sono tipiche del discorso scientifico primario (verbi impersonali o passivi, presenza di gerundi); la scelta, soprattutto nei testi per gli anni inferiori di scolarità, di optare invece, talvolta, per espressioni che iniziano con un'unità informativa orientata a un'operazione concreta (a un "fare": *Per calcolare...*) si può spiegare con la natura stessa del genere testuale e con i suoi obiettivi comunicativi rispetto ai destinatari. Tale scelta non sparisce nei testi per gli anni successivi, in cui, però, come vedremo al paragrafo successivo, compaiono anche strutture linguistiche via via più complesse.

5.4.2.3 L'articolazione logico-argomentativa interna: le relazioni logiche più rilevanti

Un dato degno di nota che emerge dall'analisi delle *proposizioni* del corpus, e che le distingue dalle *definizioni*, è che esse accolgono in maniera naturale un'impalcatura semantica interna di tipo *logico-argomentativo*. Come ci aspettiamo, la configurazione semantica più frequente è quella condizionale, caratterizzata dalla struttura *se... allora...* (con *allora* spesso non espresso, come mostrano gli esempi (13), (14), (15)), assente nei sub-corpora di II e di III primaria, ma ricorrente nei testi per gli anni successivi²⁴:

- (13) Il circocentro è:
- ° interno se il triangolo è acutangolo;
 - ° coincidente con il punto medio dell'ipotenusa se il triangolo è rettangolo;
 - ° esterno se il triangolo è ottusangolo. (11_6, p. 266)
- (14) Se si addizionano o si sottraggono parti congruenti a figure congruenti, si ottengono figure equivalenti. (2_7, p. 4)

24. In III è presente il *se* in sole 2 proposizioni sulle 106 presenti nel sub-corpus relativo a questa classe (entrambe nel testo 17_3), ma con una sfumatura diversa (non quella dell'implicazione logica): "Se consideri come unità di misura il lato di un quadretto puoi calcolare il perimetro" e "Se invece vuoi calcolare la misura della parte di piano che il poligono occupa, cioè la misura della superficie azzurra, occorre una unità di misura adatta: cioè un quadratino".

(15) Due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l'angolo tra essi compreso rispettivamente congruenti. (5_7, p. 18)

(16) Se gli angoli opposti di un quadrilatero sono supplementari allora il quadrilatero è inscritto in una circonferenza. (8_7, p. 44)

Come si può notare, la struttura è tipicamente quella della frase complessa con subordinata introdotta da *se*, che contiene le condizioni che devono essere soddisfatte affinché si verifichi un certo stato di cose; si sono riscontrati tuttavia anche casi di ricorso a una dipendente gerundiva, come questo:

(17) L'area di un trapezio si ottiene moltiplicando la misura della somma delle basi per la misura dell'altezza e dividendo il prodotto per due. (c1_7, p. 20)

Qui le forme indefinite *moltiplicando* e *dividendo*, ricorrenti nel testo scientifico in generale e anche in quello matematico, potrebbero essere espresse con *se si moltiplica* e *se si divide*, oppure con una formulazione analoga alla seguente:

(17a) L'area di un trapezio si ottiene nel seguente modo: si moltiplica la misura della somma delle basi per la misura dell'altezza e si divide il prodotto per due.

Sono inoltre attestate *proposizioni* costruite attorno a una relazione di consecuzione, che si ha quando «un'affermazione, un'ipotesi, un giudizio [...] risultano da quanto precede grazie a un ragionamento di carattere inferenziale che collega premesse e conclusione» (Ferrari, Lala & Zampese, 2021, p. 110). Nei seguenti esempi la relazione è individuata da un connettivo specificamente preposto a segnalare: *quindi, dunque, di conseguenza, però*.

(18) Ogni triangolo ha tre lati e quindi tre altezze. (1_4, p. 330)

(19) Osserva che i triangoli equilateri sono anche equiangoli: i triangoli equilateri sono dunque poligoni regolari. (4_4, p. 80)

(20) Il rombo, come il quadrato, è un poligono equilatero, quindi per calcolarne il perimetro basta moltiplicare la misura del lato per 4. (10_4, p. 327)

(21) Ogni poligono ha un rapporto costante tra apotema e lato e, di conseguenza, un proprio numero fisso. (13_5, p. 306)

(22) Ogni lato del triangolo può essere preso come base, perciò in un triangolo ci sono sempre 3 altezze. (15_5, p. 289)

Nella composizione semantica interna delle *proposizioni* si riscontra anche la relazione di causa o motivazione, che obbedisce allo stesso principio comunicativo della relazione di consecuzione, di cui è speculare (come si può leggere in (23) e (24): prima è espressa l'affermazione, poi le motivazioni a sostegno):

(23) Il baricentro è sempre interno al triangolo perché le mediane sono sempre interne alla figura. (c4_6, p. 244)

(24) Per quanto sappiamo, un triangolo si può sempre inscrivere in una circonferenza, in esso infatti è unico il circocentro. (9_7, p. 100)

Si noti che la scelta della consecuzione e della motivazione manifesta la volontà dell'estensore del manuale di offrire ragioni al destinatario rispetto al contenuto della *proposizione*: questa, infatti, non si limita all'unità informativa principale (*Il baricentro è sempre interno al triangolo*), ma è corredata dalla motivazione introdotta dal *perché*. La lingua fa, dunque, emergere la logica su cui si fonda l'attribuzione di proprietà espressa dalla *proposizione*. Ciò se, da un lato, sembra offrire maggiori elementi di sapere al lettore, dall'altro apre alcuni interrogativi: sicuramente, andrebbe considerato che la presenza di un connettivo potrebbe non essere sufficiente per spiegare davvero in profondità agli allievi la complessità del legame matematico fra i contenuti; legame che, per essere compreso appieno, richiede non solo una sicura capacità di interpretazione della relazione logica espressa in forma linguistica (cioè che cosa significano, nel contesto, parole funzionali come *perciò*, *perché*, *infatti* ecc.), ma anche una buona padronanza degli aspetti semantici in gioco, cioè dei contenuti geometrici richiamati e messi in relazione.

Prendiamo, ad esempio, la *proposizione* (22) sopra citata, osservandola nel movimento testuale in cui è inserita (Fig. 31, 15_5, p. 289):

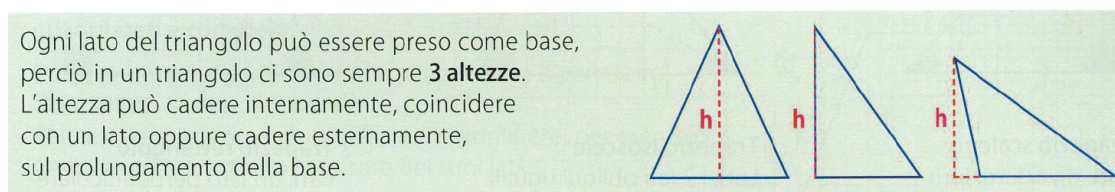


Fig. 31 – Una *proposizione* con architettura interna caratterizzata dal connettivo *perciò*.

Per avere una corretta e coerente rappresentazione semantica della relazione che lega le due unità informative che precedono e seguono il *perciò*, il lettore deve avere chiare sia le singole informazioni (particolarmente dense e impacchettate, seppur sostenute anche dalla figura: che cosa sono i lati, che cos'è un triangolo, il fatto che i lati possano essere presi come base, che cosa si intende con altezza), sia il rapporto causale che intercorre fra loro.

5.4.3 Analisi informativa delle esemplificazioni: una sistemazione di alcuni fenomeni significativi

Prima di procedere con l'esame di alcuni tratti significativi dei microatti *esemplificazione* dei testi del corpus, va ricordato quanto scritto al **paragrafo 5.3.4**, e cioè che, in generale, la relazione esemplificativa si realizza quando, per illustrare un'asserzione generale, viene scelto *un* rappresentante in un paradigma di alternative possibili. In genere, nel testo matematico si hanno una o più *esemplificazioni* dopo o talvolta prima che è stato definito un ente geometrico, asserita una proprietà o una relazione. Senza dimenticare come questi microatti possano presentarsi anche simultaneamente ad altri tipi di microatti in una stessa porzione di testo (**Fig. 32**, 3_4, p. 328), chiarendo certamente le asserzioni, ma anche aumentando il costo cognitivo di interpretazione:



Fig. 32 – Tre *esemplificazioni* (gli stessi enunciati hanno anche il valore informativo di *definizione* e *denominazione*) (IV primaria).

In questo lavoro, è però nostro interesse andare ancora più a fondo nelle peculiarità linguistiche del concetto di esempio in ambito matematico e della sua trasposizione in un microatto testuale, anche superando i formati linguistici e le modalità canoniche e attestate nella lingua dell'uso. Infatti, nel discorso matematico didattico l'*esemplificazione* non solo è molto ricorrente, come hanno mostrato, peraltro, i dati quantitativi dei **paragrafi 5.3.7.1** e **5.3.7.2**, in cui si è riscontrata la netta dominanza quantitativa delle *esemplificazioni* nei libri dell'intero corpus, ma può anche presentarsi in forme e con tratti del tutto specifici. La frequenza e le peculiarità dell'*esem-*

plificazione dipendono da varie caratteristiche specifiche della matematica, come, ad esempio, l'avere a che fare con il *paradosso cognitivo* illustrato da Raymond Duval, che sottolinea come lo studente debba inevitabilmente passare da rappresentazioni semiotiche per costruirsi un oggetto matematico astratto e la necessità di confrontarsi in ambito geometrico con gli aspetti figurali degli oggetti in gioco.

Andiamo allora a osservare alcuni tratti particolari della natura e della struttura informativa delle *esemplificazioni* tipiche del testo di matematica per la scuola, riportando direttamente alcune parti di libro (data, spesso, la lunghezza degli estratti e l'importanza degli aspetti grafici).

5.4.3.1 La segnalazione linguistica dell'esemplificazione

Un primo elemento da rilevare è relativo alla segnalazione linguistica esplicita dell'*esemplificazione* (quando si verifica) con il connettivo *ad/per esempio*, che può mostrarsi staccato da ciò che introduce e variamente enfaticizzato (dal colore, dal grassetto, quasi come un titolo), oppure inglobato discorsivamente e anche graficamente nel testo che introduce. Qui di seguito un caso in cui si ha l'espressione *per esempio* messa in rilievo all'inizio dell'unità di testo esemplificante (Fig. 33, 3_6, p. 180):

● Angoli esterni

Osservando la figura a lato, ti rendi conto che ogni angolo esterno è supplementare dell'angolo interno che ha lo stesso vertice.

Nel nostro caso, per esempio, β è supplementare di α .

Se n è il numero dei lati del poligono, la somma degli angoli interni e degli angoli esterni è allora uguale a n angoli piatti.

Di questi, $n - 2$ sono la somma degli angoli interni; i restanti due sono allora la somma degli angoli esterni.

In generale:

La **somma degli angoli esterni** di un poligono è uguale a due angoli piatti, qualunque sia il numero dei lati.

PER ESEMPIO

In un pentagono la somma degli angoli interni è:

$$180^\circ \cdot (5 - 2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$$

La somma degli angoli esterni è:

$$5 \cdot 180^\circ - (5 - 2) \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

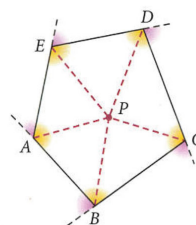
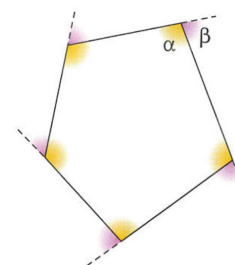
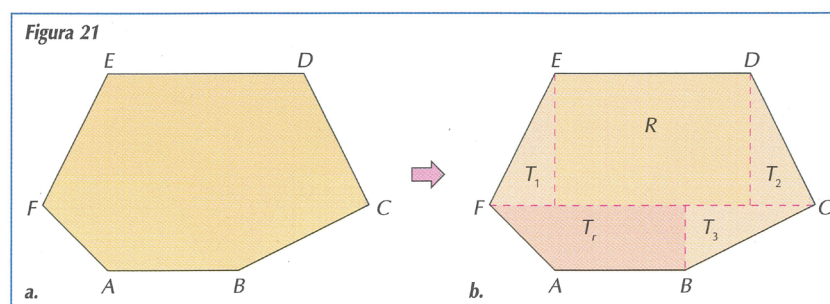


Fig. 33 – La segnalazione linguistica dell'*esemplificazione* (in forma isolata ed enfaticizzata) (I secondaria di primo grado).

Per lo più a inizio enunciato, come quadro d'apertura, ma anche inserito più in là nel testo, *per/ad esempio* può comparire in modo non enfattizzato, come nel seguente caso (e in molti altri di questo paragrafo), che mostra un'*esemplificazione* piuttosto articolata e dinamica (**Fig. 34**, 16_7, p. 25):

Consideriamo, ad esempio, l'esagono irregolare della **figura 21a**. Scomponiamo il poligono tracciando la diagonale FC e conducendo dai vertici B, D, E i segmenti perpendicolari a tale diagonale. In questo modo abbiamo ottenuto i triangoli T_1, T_2 e T_3 , il rettangolo R e il trapezio rettangolo T_r (**figura 21b**).



$$\text{Pertanto: } A_{(ABCDEF)} = A_{(T_1)} + A_{(T_2)} + A_{(T_3)} + A_{(R)} + A_{(T_r)}.$$

Fig. 34 – La segnalazione linguistica dell'*esemplificazione* (non enfattizzata ma inglobata nel testo) (Il secondaria di primo grado).

Pur non presentando una particolare varietà lessicale nelle possibilità di segnalazione linguistica, l'*esemplificazione* può anche essere introdotta da altre forme quali, per esempio, il *come* presente nel seguente estratto (**Fig. 35**, 2_2, p. 71), che introduce un'*esemplificazione* per similitudine:



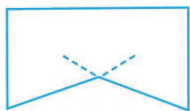
Le figure che non hanno spessore, **come il rettangolo, il quadrato, il triangolo, il cerchio**, sono figure piane.
Le figure che escono dal piano e hanno uno spessore, **come il cilindro, il cono, la sfera, il cubo, il parallelepipedo, la piramide**, sono figure solide.

Fig. 35 – Un'*esemplificazione* introdotta da *come* (Il primaria).

L'*esemplificazione*, qui, si presenta in forma di inciso (da "come il rettangolo" a "cerchio") nell'enunciato che esprime la *definizione* di *figure piane* e le varie *denominazioni*. Con un solo microatto linguistico si eseguono dunque matematicamente tre microatti diversi: *definizione*, *denominazione* ed *esemplificazione*.

Sono inoltre molto frequenti – come mostrato al **paragrafo 5.4.3.1** – i casi di “segnalazione linguistica zero”: casi in cui il testo non reca traccia né linguistica né grafica del fatto che si stia compiendo un microatto di *esemplificazione* (cioè che si stia mostrando un esempio); spesso ciò accade quando i microatti *esemplificativi* sono abbinati ad altri tipi di enunciati, che non richiedono un introduttore (come le *definizioni*, le *proposizioni* o le *denominazioni*). L'esempio rimane, quindi, silenzioso: sta al lettore inferire il giusto rapporto logico e di composizione testuale, e cioè che si tratta di singoli casi esemplificativi di infinite possibilità, come mostra l'estratto (**Fig. 36**, 1_4, p. 328), in cui si ha una semplice giustapposizione testo-figura:

Un poligono è **concavo** se è attraversato dal prolungamento di alcuni dei suoi lati.



Un poligono è **convesso** se i prolungamenti dei suoi lati non lo attraversano.

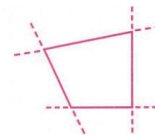


Fig. 36 – Due *esemplificazioni* non segnalate linguisticamente (IV primaria).

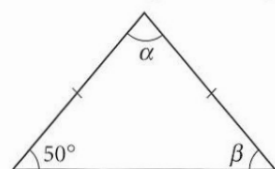
Sarebbe utile sostenere gli allievi nella comprensione di questi casi di *esemplificazione* tacita: si tratta, infatti, di favorire la conversione semiotica tra il registro linguistico e quello figurale, in particolare il passaggio da un enunciato che parla di infiniti oggetti matematici a un suo specifico rappresentante e, più in generale, un passaggio fondamentale dalla materialità del libro di testo (concreto e circoscritto) all'autentica comprensione concettuale matematica (intangibile poiché astratta).

5.4.3.2 Come parla l'esemplificazione al lettore

Un'ulteriore variabile utile per analizzare le *esemplificazioni* riguarda il tipo di atto linguistico a cui esse si appoggiano. Se nella maggior parte dei casi si tratta di asserzioni in senso stretto, si rilevano anche casi che possiedono una componente (spesso fintamente) richiestiva, come avviene nel seguente estratto, in cui troviamo un imperativo associato al solo interlocutore (“Calcola l'ampiezza ecc.”, che, di fatto, è già calcolata dall'autore del testo) (**Fig. 37**, 4_6, p. 154):

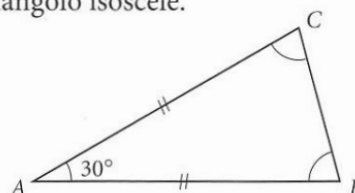
Nei triangoli isosceli, per calcolare l'ampiezza di tutti gli angoli, è sufficiente avere la misura di uno solo di essi. Basta sapere se si tratta di un angolo alla base o di un angolo al vertice.

Esempio Calcola l'ampiezza degli angoli del triangolo isoscele.



$$\begin{aligned}\beta &= 50^\circ \\ \alpha &= 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ \\ &= 80^\circ\end{aligned}$$

Risposta: $\beta = 50^\circ$, $\alpha = 80^\circ$



$$\begin{aligned}\widehat{B} &= \widehat{C} \\ \widehat{B} &= (180^\circ - 30^\circ) : 2 \\ &= 150^\circ : 2 \\ &= 75^\circ\end{aligned}$$

Risposta: $\widehat{B} = \widehat{C} = 75^\circ$

Fig. 37 – Un'esemplificazione apparentemente richiestiva: il calcolo è già svolto (I secondaria di primo grado).

Questo avviene anche nell'esempio seguente, in cui la forma verbale imperativa si coniuga con il soggetto "noi", denunciando così chiaramente il valore falsamente richiestivo – a ben guardare non si chiede davvero di fare qualcosa – di questo tipo di atti linguistici esemplificanti (**Fig. 38**, 8_6, p. 118):

Disegniamo tre poligoni: un pentagono, un quadrilatero e un triangolo e tracciamo tutte le loro diagonali (**figura 7**). Se contiamo quante diagonali escono da ogni vertice dei poligoni notiamo che:

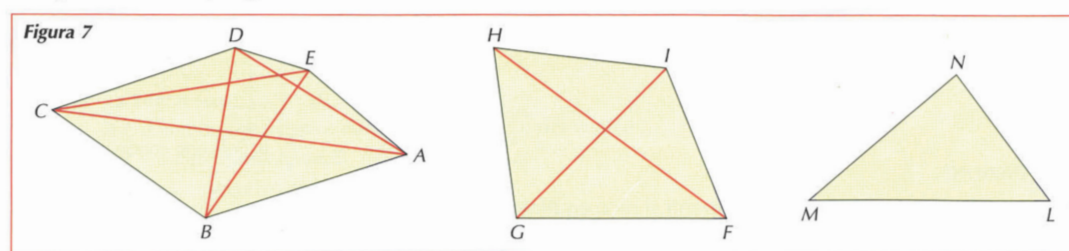


Fig. 38 – Un'esemplificazione apparentemente richiestiva, con uso del *noi* inclusivo (I secondaria di primo grado).

In altri casi, soprattutto nei testi per gli allievi più giovani, nei movimenti testuali *logico-argomentativi* legati al *fare* può accadere che il valore di richiesta sia reale, come nel seguente caso (**Fig. 39**, 14_2, p. 96):

- 2 Cerchia solo le figure delimitate da una **linea spezzata**, **chiusa** e **semplice**. Poi indica con una X il completamento corretto.

Una figura piana che ha per confine una **linea spezzata** è un **poligono**. Una figura piana che ha per confine una **linea curva** o **mista** non è un poligono.



Fig. 39 – Esempificazioni nell'ambito di un movimento testuale *logico-argomentativo* (modalità fare) (II primaria).

L'insieme delle figure offre, in sé, delle *esemplificazioni* (tacite) non annunciate, ma presenti all'attenzione, su cui l'allievo deve operare una scelta: cerchiare secondo un criterio, cioè operare su esempi per astrarre una categoria.

5.4.3.3 Esempificazioni in praesentia e in absentia

Dall'analisi delle *esemplificazioni* emerge una sistemazione linguistico-testuale degna di nota: quella tra *esemplificazioni in praesentia* e *in absentia*. Vediamo come questo concetto linguistico si realizza preferenzialmente nel discorso matematico. Le *esemplificazioni* si dicono *in praesentia* quando l'enunciazione generale a cui si riferiscono compare esplicitamente nel testo; si dicono, invece, *in absentia* quando tale enunciazione resta linguisticamente implicita. Le prime, più diffuse, sono ben rappresentate dal seguente estratto, che ne presenta due (Fig. 40, 1_6, p. 522):

Il **perimetro** di un *poligono equilatero* o di un *poligono regolare* si calcola moltiplicando la misura di un lato (l) per il numero dei lati (n):

$$p = l \times n$$

Per esempio, il perimetro di un poligono equilatero di otto lati, avente un lato di 3 cm, è:

$$p = l \times n = 3 \times 8 = 24 \text{ (cm)}$$

Viceversa, la misura di un lato si ottiene dividendo il perimetro per il numero dei lati:

$$l = \frac{p}{n}$$

Per esempio, se il perimetro di un triangolo equilatero è di 75 cm, la misura del lato è:

$$l = \frac{p}{n} = 75 : 3 = 25 \text{ (cm)}$$

Fig. 40 – Microatti *esemplificativi in praesentia* che seguono l'enunciazione generale della proprietà (I secondaria di primo grado).

Qui abbiamo due enunciazioni che stanno fra loro in una relazione di opposizione, segnalata da *viceversa*, seguite entrambe da un enunciato esemplificante, introdotto da *Per esempio*. L'estratto seguente illustra un altro caso di *esemplificazione in praesentia* (Fig. 41, 13_6, p. 229):

◆ Primo criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti **due lati** e l'**angolo tra essi compreso**, allora sono congruenti.

Quindi, per esempio, per affermare che ABC e $A'B'C'$ sono congruenti è sufficiente verificare che: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$.

Il criterio:



Fig. 41 – Microatto *esemplificativo in praesentia* che segue l'enunciazione della proprietà (I secondaria di primo grado).

Quindi segnala l'esistenza di un paradigma di conseguenze legate alla proprietà asserita nel box giallo, presentandone un solo caso, che funge così da esempio (*per esempio*). Alla luce di quest'analisi, viene naturale interrogarsi sull'utilità del connettivo consecutivo dal punto di vista della comprensione o se non sarebbe stato meglio scegliere un'esemplificazione diretta quale "Per esempio, i due triangoli rappresentati sono congruenti perché $AB = A'B'$ ecc.", magari evitando elementi linguistici che appesantiscono l'interpretazione come la finale in forma implicita (*per affermare*) e l'impersonale (*è sufficiente*).

In alcuni casi, come quello seguente (Fig. 42, 9_6, p. 161), l'*esemplificazione* precede, invece, la proprietà alla quale arrivare (che inizia con *Diciamo che...*): questa proprietà è dunque costruita induttivamente a partire dall'esempio. Accanto a questa caratteristica, il caso proposto presenta altre due specificità rilevanti per l'*esemplificazione*: la prima è che ci si riferisce a *un triangolo qualsiasi* ma di fatto, a partire dalla figura, si ragiona su un caso specifico; la seconda è che si mostrano tre mediane chiedendo però di ragionare su una sola di esse, quella nominata dal testo.

Consideriamo le tre mediane e il baricentro di un triangolo qualsiasi. Il baricentro G divide ciascuna mediana in due parti, ad esempio la mediana RM è divisa in RG e GM ; se con un righello misuriamo queste due parti di ciascuna mediana ci accorgiamo che sono una il doppio dell'altra:

$$GR = 2GM, \quad PG = 2GM', \quad QG = 2GM''$$

Diciamo che il baricentro divide ogni mediana in **due parti che sono una il doppio dell'altra**.

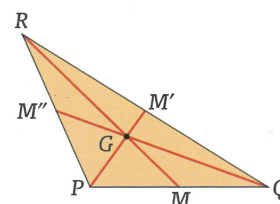


Fig. 42 – Un'*esemplificazione* che porta alla costruzione della proprietà (e all'interno un'altra *esemplificazione annidata*) (I secondaria di primo grado).

Le *esemplificazioni in absentia* si hanno invece quando non c'è un'enunciazione di carattere generale a cui il caso particolare può essere ricondotto, ma viene solo presentata un'opzione possibile fra altre, prevalentemente riferite a procedure o procedimenti da seguire, come mostrano i seguenti esempi: (Fig. 43, 5_4, p. 264) e (Fig. 44, 6_7, p. 19).

Ritagliando il **parallelogramma** lungo l'altezza e traslando la parte ritagliata come indicato nella figura sotto, possiamo trasformare il parallelogramma in un **rettangolo equiesteso** che ha la stessa base e la stessa altezza. Quindi, calcoleremo l'area utilizzando la stessa formula del rettangolo.

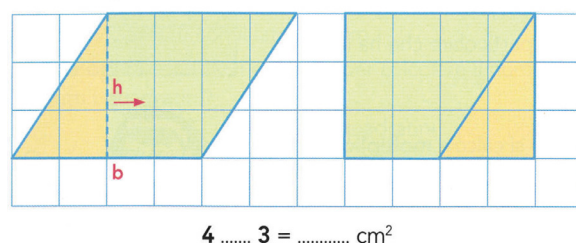


Fig. 43 – *Esemplificazione in absentia* (senza enunciazione generale): un procedimento possibile (IV primaria).

- **Area come somma di aree di poligoni:** un poligono viene scomposto come somma di più poligoni di cui sono note le formule per calcolarne l'area.

Non abbiamo una formula diretta che ci permetta di calcolare l'area dell'esagono $ABCDEF$, quindi lo scomponiamo in poligoni di cui conosciamo le formule per il calcolo dell'area: un rettangolo e un trapezio. L'area dell'esagono è uguale alla somma delle aree dei poligoni in cui lo abbiamo scomposto:

$$A_1 = A_2 + A_3$$

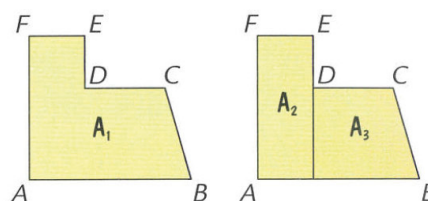


Fig. 44 – *Esemplificazione in absentia* (senza enunciazione generale): un procedimento possibile (II secondaria di primo grado).

In entrambi i casi, l'esemplificazione mostra *due* possibilità: una in riferimento a una procedura di trasformazione, l'altra in riferimento a un metodo di calcolo dell'area di un poligono scomposto in più poligoni; in entrambi i casi non è enunciata l'asserzione generale a cui queste esemplificazioni si legano come esempi. Sta a chi legge interpretare che si tratta di *due* possibilità rispetto a infinite altre, perché ciò non viene linguisticamente esplicitato in nessun modo.

5.4.3.4 La struttura interna: esemplificazioni (informativamente) semplici e articolate

L'*esemplificazione* è un microatto particolare anche per la sua costruzione interna piuttosto varia. La sequenza esemplificante, infatti, può essere costituita da un solo enunciato (inteso in senso propriamente linguistico), quindi *semplice* – come mostriamo qui sotto (Fig. 45, c2_6, p. 141): *per esempio: un triangolo rettangolo...* –, o da più enunciati, quindi *articolata*:

La suddivisione dell'insieme dei triangoli rispetto agli angoli è una partizione, dato che nessuno dei tre sottoinsiemi visti sopra è vuoto, né esistono elementi comuni a due sottoinsiemi (fig. 69); per esempio: un triangolo rettangolo non può essere anche ottusangolo.

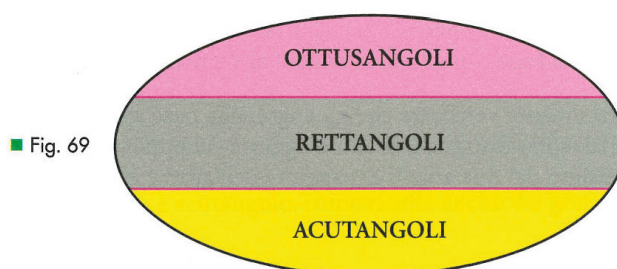


Fig. 45 – Un microatto di *esemplificazione* formato da un solo enunciato in senso linguistico (I secondaria di primo grado).

Mentre il caso in **Figura 45** è sintetico e assertivo, e in esso l'informazione non è gerarchizzata, quando c'è più di un enunciato, l'*esemplificazione* è spesso, piuttosto, ragionativa, contiene cioè un ragionamento tipicamente caratterizzato da una relazione di motivazione o da una relazione di consecuzione, marcate a volte dai rispettivi connettivi: si dà insomma un esempio facendo nel contempo ragionare. Nell'estratto seguente (Fig. 46, 3_7, p. 4), per quanto breve, si ha un legame di conseguenza segnalato da *quindi*:

Due figure si dicono **equiscomponibili** se sono composte da più parti congruenti fra loro. Le figure equiscomponibili sono sempre *equivalenti* fra loro, cioè hanno la stessa area.

ANIMAZIONE IN DIGITALE
Il principio di equiscomponibilità

PER ESEMPIO Queste quattro figure sono equiscomponibili; hanno quindi tutte la stessa area.

Fig. 46 – Un'*esemplificazione* che contiene il connettivo *quindi* (II secondaria di primo grado).

Si noti che l'espressione della motivazione e della consecuzione può anche essere veicolata in modo informativamente compatto all'interno di un singolo enunciato, sfruttando ad esempio la congiunzione *infatti, perché* (Fig. 47, 1_7, p. 222) o la combinazione della congiunzione coordinante *e* con *perciò* (Fig. 48, 10_6, p. 189):

Per esempio, le figure *R*, *S*, *T* sono equivalenti tra loro perché costituite dallo stesso trapezio *D* e dallo stesso rettangolo *E*, composti in modi diversi.

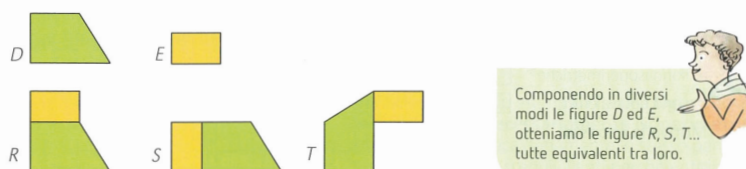


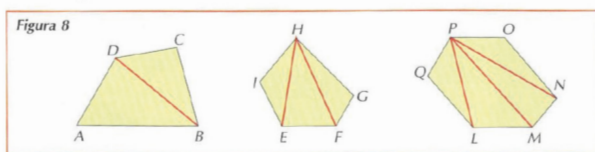
Fig. 47 – Un'esemplificazione in un unico enunciato contenente il connettivo *perché* (II secondaria di primo grado).

Se il poligono è regolare, si può calcolare l'ampiezza di ogni suo angolo interno a partire dalla somma totale dell'ampiezza degli angoli interni, basta dividere il totale per il numero dei vertici, ovvero dei lati. Per esempio, in un triangolo equilatero i lati sono tre e ogni angolo interno ha perciò ampiezza $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

Fig. 48 – Un'esemplificazione in un unico enunciato contenente *e* e *perciò* (I secondaria di primo grado).

Finora, sono state passate in rassegna *esemplificazioni* relativamente *semplici*; un caso di *esemplificazione* particolarmente *articolata* è invece illustrato dal seguente estratto (Fig. 49, 7_6, p. 180), che inizia con un'espressione anaforica di richiamo alla proprietà enunciata (*questa proprietà*):

Utilizziamo ora questa proprietà per determinare la somma degli angoli interni di altri poligoni, per esempio quadrilateri, pentagoni ed esagoni. Tracciamo da un vertice qualunque di ciascun poligono tutte le diagonali uscenti da quel vertice (figura 8).



Così facendo si suddividono i poligoni in un numero di triangoli pari al numero di lati diminuito di due; in particolare:

- il quadrilatero *ABCD* è stato suddiviso in due triangoli; la somma degli angoli interni del quadrilatero sarà $180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$;
- il pentagono *EFGHI* si può scomporre in tre triangoli; la somma degli angoli interni del pentagono sarà $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$;
- l'esagono *LMNOPQ* si può scomporre in quattro triangoli; la somma degli angoli interni dell'esagono sarà $180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$.

Fig. 49 – Un'esemplificazione articolata e complessa, che mostra una costruzione di ragionamento (I secondaria di primo grado).

Il *per esempio* alla seconda riga non introduce un semplice enunciato, cioè un caso sintetizzato e dato come esemplare; anzi: il testo va a parlare di altri poligoni ragionando sui quadrilateri, i pentagoni e gli esagoni. Si mette cioè in scena una pseudo-richiesta di fare ("Tracciamo ecc."), se ne specifica la conseguenza in generale ("Così facendo ecc.") e si specifica – usando il connettivo *in particolare* – come essa si manifesta riguardo ai tre tipi di figure e cercando così di favorire la generalizzazione. Questo tipo di *esemplificazione*, diffusa in tutti i livelli di scolarità, è non solo più articolata a livello informativo, ma si presenta in forma, potremmo dire, dinamica, di costruzione di ragionamento.

5.4.3.5 I vari registri di rappresentazione

Come ultimo aspetto rilevante da segnalare per illustrare la conformazione testuale e informativa dei microatti *esemplificativi* del testo matematico, ci pare importante notare le diverse possibilità di combinazione dei vari codici semiologici coinvolti, cioè dei vari registri di rappresentazione: si possono infatti avere *esemplificazioni* con presenza o assenza di una figura, ma anche scritte ricorrendo a formule e simboli o in maniera più discorsiva (o ibridando italiano dell'uso e codice tipico del linguaggio matematico). Innanzitutto, si possono segnalare le *esemplificazioni solo verbali*, come la seguente (Fig. 50, 2_6, p. 254):

►►► Un quadrilatero si può costruire se e solo se ciascun lato è minore della somma degli altri tre lati.

Per esempio, non si può costruire un quadrilatero con i lati di 7 cm, 2 cm, 3 cm, 15 cm perché $15\text{ cm} > (7 + 2 + 3)\text{ cm}$.

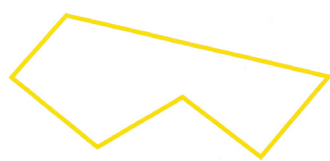
Il **perimetro** ($2p$) è la misura della somma dei lati.

Fig. 50 – Un'esemplificazione solo verbale (I secondaria di primo grado).

Si noti qui la decisione dell'autore del volume di esemplificare *ex negativo*: non fornisce un esempio di quadrilatero adeguato, ma un esempio di un'entità che non potrebbe essere un quadrilatero, una scelta che dal punto di vista didattico non sembra particolarmente felice. Si poteva eventualmente fornire un esempio di un quadrilatero e uno che non si poteva ottenere, ma certamente almeno un esempio di quadrilatero.

Seguono due esempi costituiti dalle sole figure: uno per la II primaria (Fig. 51, 9_2, p. 108) e uno per la II secondaria di primo grado (Fig. 52, c1_7, p. 294), a riprova della continuità in verticale di molte prassi manualistiche:

3 Osserva questa figura e colora in ogni riga le parole giuste.



È una linea

aperta / **chiusa**,

semplice / **intrecciata**,

curva / **spezzata** / **mista**.

UNA LINEA CHIUSA, SEMPLICE E SPEZZATA FORMA UNA FIGURA GEOMETRICA CHE SI CHIAMA **POLIGONO**.

Fig. 51 – Un'esemplificazione figurale (II primaria).

Considerando un qualsiasi poligono circoscrittibile, anch'esso può essere diviso in triangolini che hanno per base i lati e per altezza l'apotema del poligono, e quindi le formule precedenti valgono anche per determinare l'area di un qualsiasi poligono che si può circoscrivere.

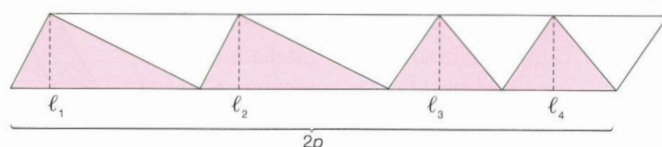
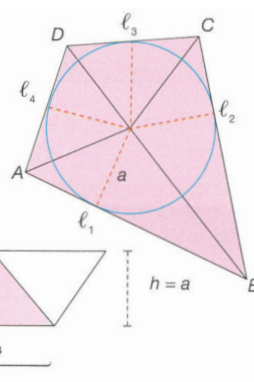


Fig. 52 – Un'esemplificazione figurale (II secondaria di primo grado).

La parte scritta si riferisce per ben due volte a *qualsiasi poligono*: accanto viene dato l'esempio di *un* poligono particolare, senza dire che è un esempio.

Ancora meno legata alla parte verbale è l'*esemplificazione* espressa nel seguente caso (Fig. 53, 9_5, p. 359):

I poligoni regolari: l'apotema

Leggi e Osserva

Il punto di incontro degli assi di simmetria di un poligono regolare è il **centro** del poligono. Se unisci il centro con i vertici del poligono, otterrai tanti triangoli congruenti quanti sono i lati del poligono.

Il segmento che dal centro del poligono regolare cade perpendicolarmente sul lato opposto, cioè l'altezza di ogni triangolo, si chiama **apotema (a)**.

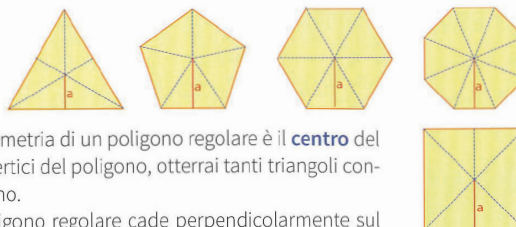


Fig. 53 – Un'esemplificazione figurale (V primaria).

In un caso come questo, il microatto *esemplificativo* è del tutto a carico delle figure: se il lettore leggesse solo il testo non ricaverebbe traccia di elementi esemplificativi.

Infine, come mostrato nei due casi qui di seguito, vi sono anche *esemplificazioni* con rappresentazioni miste, parole e figure (Fig. 54, 1_7, p. 222), (Fig. 55, 18_7, p. 33):

Per esempio, le figure *R*, *S*, *T* sono equivalenti tra loro perché costituite dallo stesso trapezio *D* e dallo stesso rettangolo *E*, composti in modi diversi.

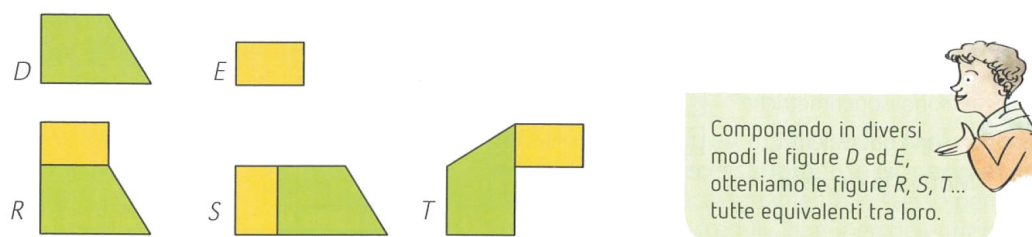


Fig. 54 – Un'esemplificazione mista, espressa in parole e figure (Il secondaria di primo grado).

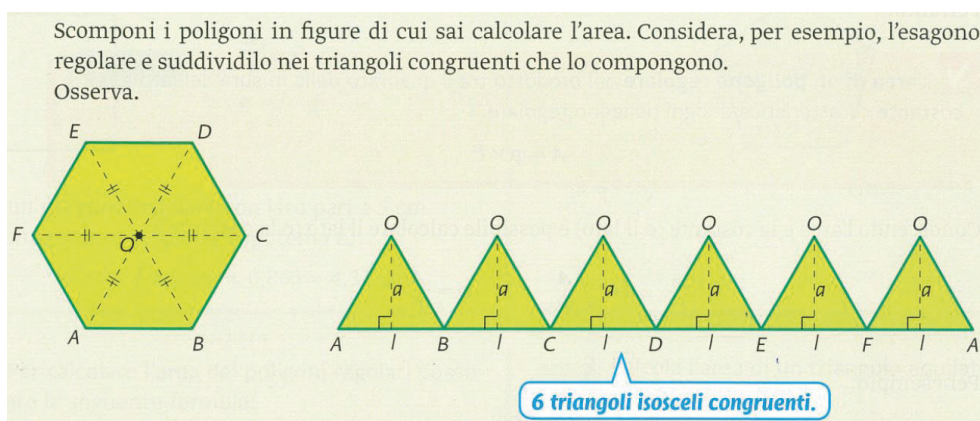


Fig. 55 – Un'esemplificazione mista, espressa in parole e figure (Il secondaria di primo grado).

In casi come questi, i due registri di rappresentazione dicono la stessa cosa in modi diversi, funzionando da traduzione l'uno dell'altro (e l'uno nell'altro). Più stretto è il legame nella **Figura 54**, in cui le lettere che indicano le figure sono richiamate nel testo, esortando il lettore a una lettura che consideri i due registri e promuova la conversione semiotica, mentre in **Figura 55** il collegamento fra le parti è lasciato all'articolo determinativo (*l'esagono*), che stabilisce un rinvio proprio a quello disegnato sulla pagina: un esempio fra gli infiniti possibili.

5.5 Relazioni tra parti linguistiche del testo e figure

Collegandosi e ampliando la prospettiva aperta al paragrafo precedente, in questo paragrafo si intende portare l'attenzione più in generale sulle relazioni tra le parti di testo espresse in linguaggio verbale e le figure presenti nel corpus DFA-Italmatica. Dapprima si offrirà una panoramica quantitativa delle relazioni individuate, volta a mostrare la pervasività di esse nel testo matematico, e, in seguito, ci si focalizzerà su alcuni elementi qualitativi che permetteranno di comprendere meglio i tipi di relazioni e le funzioni che svolgono nel testo. Poi, saranno approfonditi gli aspetti multimodali della relazione testo-figura.

5.5.1 Componente linguistica e componente figurale nel corpus DFA-Italmatica

Nel lavoro di annotazione, ogni volta che una parte linguistica richiama contenuti collegati a una figura è stata etichettata come "relazione con figura", sempre tramite il software UAM Corpus Tool (**par. 4.3.1**). Ciò ha consentito di poter estrarre per l'intero corpus anche il numero di tali relazioni e di rapportarlo con il numero di macroatti. In particolare, per il corpus italiano si sono ottenute in media 1,92 relazioni tra formulazioni linguistiche e figure per macroatto. Questa prima informazione mostra una massiccia presenza di relazioni lingua-figure nei libri di testo di geometria italiani, chiamate a sostenere la comprensione dei concetti da parte degli allievi tramite la compresenza dei due registri semiotici linguistico e figurale. Il rapporto tra le relazioni tra parti linguistiche e figure e macroatti cala nel caso del sub-corpus ticinese, passando da 1,92 a 1,20, e in modo ancora più decisivo nel caso del sub-corpus grigionese (**Tab. 11**). La minor presenza di figure in questi sub-corpora rispetto al corpus italiano risulta evidente già da una prima visione del materiale.

	Relazioni tra parti linguistiche e figure	Macroatti	Rapporti tra relazioni tra parti linguistiche e figure/macroatti
Corpus italiano	11'086	5'783	1,92
Sub-corpus ticinese	483	404	1,20
Sub-corpus grigionese	109	198	0,55

Tab. 11 – Rapporti tra relazioni tra parti linguistiche e figure/macroatti nei diversi corpora.

Per quanto concerne l'evoluzione di questi rapporti per anno nel corpus italiano (**Tab. 12**), si nota come l'uso delle figure a sostegno del testo aumenta soprattutto in I e in III secondaria di primo grado (SSPG), pur essendo nell'immaginario comune la figura un aiuto soprattutto per i più piccoli.

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Relazioni tra parti linguistiche e figure	143	471	1'694	1'239	5'192	2'112	235
Macroatti	113	306	1'201	858	2'160	1'045	100
Rapporti tra relazioni tra parti linguistiche e figure/macroatti	1,27	1,54	1,41	1,44	2,40	2,02	2,35

Tab. 12 – Rapporti tra relazioni tra parti linguistiche e figure/macroatti suddivisi per anno per il corpus italiano.

Tale aumento con il progredire degli anni scolastici si riscontra anche per il sub-corpus ticinese, in particolare per la classe III SSPG (**Tab. 13**), mentre non è confermato nel caso grigionese, soprattutto per la II SP (**Tab. 14**).

	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Relazioni tra parti linguistiche e figure	266	136	81
Macroatti	286	86	32
Rapporti tra relazioni tra parti linguistiche e figure/macroatti	0,93	1,58	2,53

Tab. 13 – Rapporti tra relazioni tra parti linguistiche e figure/macroatti suddivisi per anno per il sub-corpus ticinese.

	II SP	III SP	IV SP	V SP	VI SP	I SSPG
Relazioni tra parti linguistiche e figure	18	0	17	12	47	15
Macroatti	9	11	23	24	101	30
Rapporti tra relazioni tra parti linguistiche e figure/macroatti	2,00	0	0,74	0,50	0,47	0,50

Tab. 14 – Rapporti tra relazioni tra parti linguistiche e figure/macroatti suddivisi per anno per il sub-corpus grigionese.

Dopo questa prima analisi globale, si è scelto di individuare un sub-corpus di libri di testo scolastici sui quali analizzare più in profondità le relazioni tra le parti espresse in forma linguistica e le figure. Partendo dal corpus italiano e dalla logica con la quale è stato individuato (**par. 4.1**), si è scelto di creare il sub-corpus per indagare le relazioni con figure considerando i libri più adottati dai docenti nell'anno in cui avviene

l'adozione (II e IV primaria e I secondaria di primo grado), dato che questa scelta viene mantenuta, considerando poi per gli altri anni scolastici successivi i testi collegati ai libri capofila. Si sono così ottenuti 6 libri di testo, uno per ogni classe dalla II primaria alla II secondaria di primo grado: non è stato preso in considerazione il libro per la III secondaria di primo grado poiché in questa edizione non era presente l'argomento poligoni. All'interno di questi 6 libri sono state individuate 457 relazioni tra parti linguistiche e figure. Da questa analisi sono emerse le seguenti considerazioni.

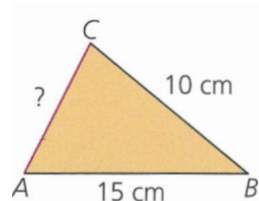
Presenza in macroatti. Si è inizialmente indagato in quale tipo di movimento testuale (macroatto) sono maggiormente presenti le relazioni tra parti linguistiche di testo e figure. I risultati di tale analisi sono riportati nella **Tabella 15**. Nei libri di scuola primaria, le figure si trovano prevalentemente in relazione con parti linguistiche che si trovano in movimenti testuali di tipo *dichiarativo*, con qualche eccezione per i *logico-argomentativi*. Dalla secondaria di primo grado si rileva una presenza maggiore del movimento testuale *logico-argomentativo*, in particolare legato all'*immaginare*, seguito dal movimento testuale *dichiarativo*. Va osservato che in II secondaria di primo grado il *logico-argomentativo* di tipo *immaginare* rappresenta l'unico movimento testuale in cui sono presenti relazioni con figure.

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG
Dichiarativo	2 (0,44%)	20 (4,38%)	82 (17,94%)	42 (9,19%)	97 (21,23%)	0 (0,00%)
Logico-argomentativo (fare)	2 (0,44%)	2 (0,44%)	1 (0,22%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)
Logico-argomentativo (immaginare)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	15 (3,28%)	6 (1,31%)	69 (15,10%)	87 (19,04%)
Logico-argomentativo (astrarre)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	26 (5,69%)	0 (0,00%)
Narrativo-descrittivo	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)
Direttivo	0 (0,00%)	0 (0,00%)	3 (0,66%)	0 (0,00%)	3 (0,66%)	0 (0,00%)
Totale	4 (0,88%)	22 (4,81%)	101 (22,10%)	48 (10,52%)	195 (42,67%)	87 (19,04%)

Tab. 15 – Relazioni tra parti linguistiche e figure presenti nei diversi tipi di movimenti testuali suddivisi per anno.

Figure "necessarie". È stato inoltre indagato quando la parte espressa in registro verbale risulta autonoma, ossia non necessita della presenza delle figure (se non per l'aspetto visuale), come nel seguente esempio (**Fig. 56**, 1_6, p. 546), e quando invece la figura assume un ruolo indispensabile nei confronti del testo (**Fig. 57**, 1_2,

p. 70), fornendo informazioni essenziali per la comprensione di ciò che è richiesto o detto dal testo.



Date le misure di due lati di un triangolo, possiamo individuare il valore da assegnare al terzo lato affinché il triangolo possa esistere. Per esempio, se in un triangolo ABC i lati AB e BC misurano 15 cm e 10 cm, abbiamo:
 $AC < (15 + 10)$ cm, cioè $AC < 25$ cm e $AC > (15 - 10)$ cm, cioè $AC > 5$ cm. Ne consegue che la misura di AC deve essere minore di 25 cm e maggiore di 5 cm. In simboli: $5 \text{ cm} < AC < 25 \text{ cm}$.

Fig. 56 - Un esempio di relazioni con figure che risultano non necessarie alla comprensione (I secondaria di primo grado).

Quale figura è chiusa da una linea spezzata? La figura

Quale figura è chiusa da una linea curva? La figura

Quale figura è chiusa da una linea mista? La figura


Sono tutte figure piane?

Che cosa ha di diverso la figura A dalle altre?


☐ Il suo confine non ha parti curve.

☐ È chiusa.


A, B, C sono tutte figure piane, ma solo la figura A è un **poligono**, perché il suo confine non ha parti curve.



A



B



C

Fig. 57 - Un esempio di relazioni con figure che risultano necessarie per la comprensione (II primaria).

Nella stragrande maggioranza dei casi, l'89,72% (410 su 457 relazioni tra parti linguistiche e figure), le figure non risultano strettamente necessarie per la completezza informativa del testo, nel senso che non forniscono informazioni aggiuntive alla parte linguistica. Ciò nonostante, le figure mantengono un ruolo fondamentale per visualizzare i concetti matematici presentati nei libri di testo, integrando alla parte concettuale l'importante parte figurale prevista da Fischbein all'interno del costrutto dei *concetti figurali* (par. 2.5); componente, quella figurale, che è bene mantenere esplicita a livello didattico soprattutto in fase di acquisizione dei concetti.

Conversioni tra parti linguistiche e figure. Per andare ancora più in profondità nelle relazioni tra parti linguistiche e figure a esse collegate si è indagata la presenza di

estratti di testi che possono favorire l'attività cognitiva di *conversione* nel senso espresso da Duval (**par. 2.4**): si ha una *conversione* quando si presentano le stesse informazioni espresse tramite due registri semiotici differenti; in questo senso, la *conversione* indica una sorta di interscambiabilità tra la fruizione della lettura del testo verbale e delle figure. Ovviamente, in questi casi la figura mostra un unico rappresentante di una categoria generale di possibili figure, ossia un esempio. Inizialmente si è visto quanti sono gli estratti di testo del sub-corpus che presentano informazioni analoghe espresse nel registro linguistico e in quello figurale, favorendo così la *conversione*: ne è emerso che il 53,83% (246 su 457 relazioni tra parti linguistiche e figure) favoriscono le *conversioni* (si veda un esempio che favorisce la *conversione* (**Fig. 58**, 1_6, p. 520) e uno che non la favorisce (**Fig. 59**, 1_4, p. 342)²⁵. Mettendo in relazione questa informazione con quella precedente, ossia che nella stragrande maggioranza dei casi le figure non risultano strettamente necessarie per la completezza informativa del testo, si può dedurre che solitamente la parte linguistica mostra più informazioni rispetto alle figure presenti nei libri di testo.

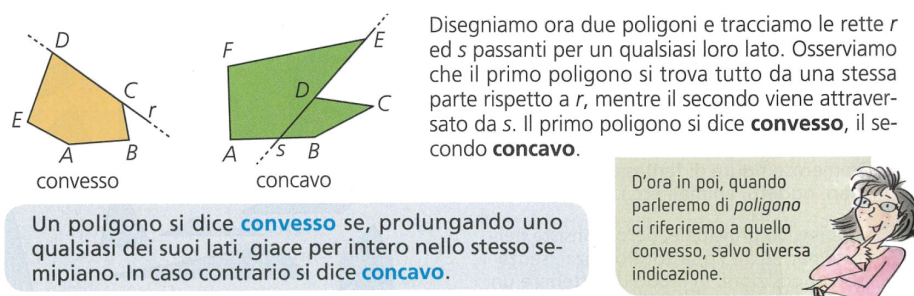


Fig. 58 - Esempio di *conversione* tra parte linguistica e figura (I secondaria di primo grado).

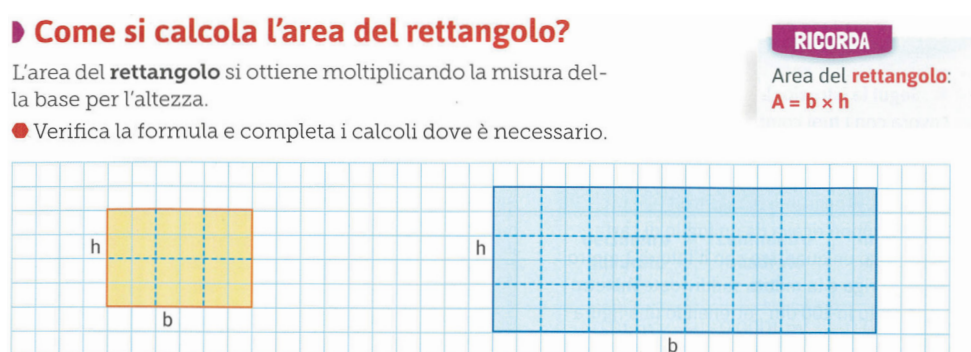


Fig. 59 - Esempio in cui non viene riscontrata una *conversione* (IV primaria).

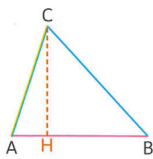
25. Per un approfondimento del tema della *conversione* dal punto di vista della multimodalità si veda il paragrafo successivo.

I 246 estratti di testo che possono favorire le *conversioni* sono stati catalogati in base al tipo di enunciato al quale era collegata la figura, cioè *definizione*, *denominazione*, *proposizione*, ottenendo rispettivamente i seguenti risultati: 24,80% (61 su 246), 40,24% (99 su 246) e 32,52% (80 su 246). A queste categorie è stata aggiunta quella *procedurale* presente nel 2,44% dei casi (6 su 246) che si ha quando sia la parte linguistica sia la figura illustrano un procedimento da svolgere come nel seguente esempio (Fig. 60, 1_5, p. 310):

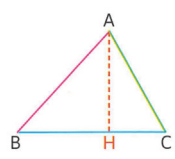
LABORATORIO DELLE COMPETENZE

SCOPRO LE TRE ALTEZZE DI UN TRIANGOLO

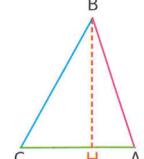
1. Disegniamo il triangolo ABC con la base AB in rosso, il lato BC in blu, il lato CA in verde. L'**altezza CH** è perpendicolare alla base AB.



2. Ruotiamo in senso orario il triangolo in modo che ora la base sia il lato BC. L'**altezza AH** è perpendicolare alla base BC.



3. Ruotiamo di nuovo il triangolo in modo che ora la base sia il lato CA. L'**altezza BH** è perpendicolare alla base CA.



● Ora disegna tu.
Ricalca il triangolo ABC e la sua altezza su carta da lucido. Poi ruota il tuo disegno e sovrapponi ai triangoli BCA e CAB, ricalcando le rispettive altezze. Otterrai la figura del triangolo ABC, che vedi a fianco, con tutte e tre le sue altezze.

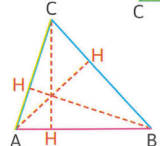


Fig. 60 - Esempio di *conversione procedurale* (V primaria).

Questi esempi mostrano come i due registri semiotici, linguistico e figurale, lavorino in collaborazione nei libri di testo di geometria a diversi livelli.

Le azioni delle figure. Si è inoltre scelto di analizzare nelle relazioni tra parti linguistiche e figure che tipo di azione la figura richiede al lettore. Tali azioni sono state suddivise in quattro categorie:

- *vedere*, si chiede esclusivamente di osservare la figura (Fig. 61, 1_6, p. 556);

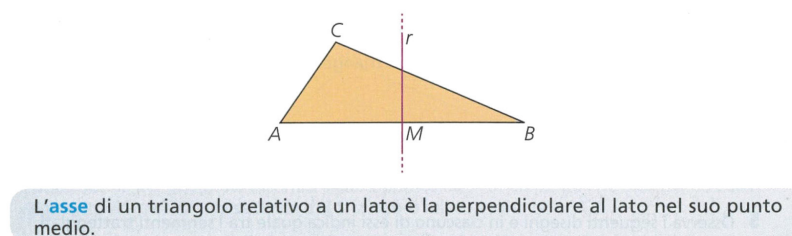
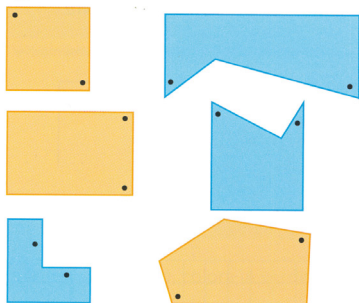


Fig. 61 - Esempio di relazione con la figura della categoria *vedere* (I secondaria di primo grado).

– *modificare*, si chiede di intervenire sulla figura aggiungendo elementi (Fig. 62, 1_3, p. 80):

Poligoni concavi e convessi

2 In ogni poligono unisci con un segmento i due puntini. Poi indica con una **X**.



- Nei poligoni arancioni il segmento si trova completamente all'interno del poligono? ☒ **Sì** ☐ **No**
- Nei poligoni arancioni disegna altri punti e collegali. I segmenti si trovano sempre all'interno del poligono? ☒ **Sì** ☐ **No**
- Nei poligoni azzurri il segmento si trova completamente all'interno del poligono? ☐ **Sì** ☒ **No**

Un poligono è **convesso** se tutti i segmenti che uniscono due punti qualunque della sua superficie rimangono all'interno del poligono.

Un poligono è **concavo** se esiste almeno un segmento che unisce due punti della superficie che non rimane completamente all'interno del poligono.

Fig. 62 - Esempio di relazione con la figura della categoria *modificare* (III primaria).

– *fare*, si richiedono azioni come ruotare, ritagliare o agire nella figura (Fig. 63, 1_4, p. 331):

LABORATORIO DELLE COMPETENZE

LAVORO CON GLI ANGOLI DI UN QUADRILATERO

● Ripeti con un quadrilatero la procedura già utilizzata con il triangolo.

- Disegna un quadrilatero comune.
- Colora i suoi angoli come vedi nel disegno e poi misurali con il goniometro.
- Ritaglia lungo la linea tratteggiata. Attenzione a non tagliare l'ampiezza degli angoli.
- Avvicina fra di loro gli angoli, come se fossero le tessere di un puzzle.
- Osserva: gli angoli insieme formano un angolo giro di 360°. Verificalo sommando le misure degli angoli.
- Ripeti l'esperimento. Disegna un altro quadrilatero. Il risultato è sempre lo stesso? ☐ **Sì** ☒ **NO**

Fig. 63 - Esempio di relazione con le figure della categoria *fare* (IV primaria).

– *riconoscere*, si chiede di individuare delle caratteristiche o dei concetti matematici nella figura (Fig. 64, 1_2, p. 70):

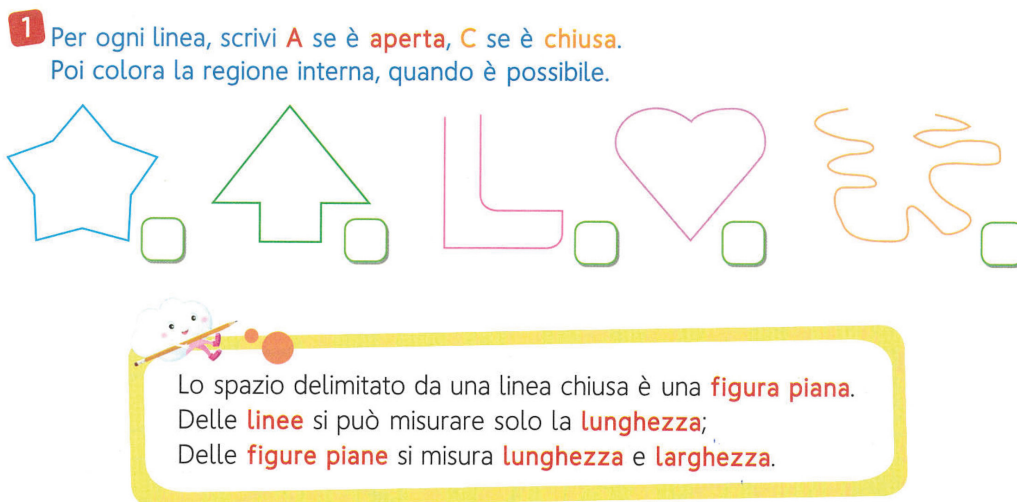


Fig. 64 - Esempio di relazione con la figura della categoria *riconoscere* (II primaria).

Questa suddivisione, emersa nelle prime fasi di analisi con i libri dei primi anni di scuola primaria, ha portato a riscontare globalmente una quasi totalità, pari al 98,47% (450 su 457), di azioni rientranti nella categoria *vedere*. Le restanti azioni sono state rilevate in un numero estremamente esiguo: 4, 1 e rispettivamente 2 casi su 457 per le azioni *modificare*, *fare* e *riconoscere* collegate prevalentemente ai macroatti *direttivi*, rendendo di fatto poco significativo investigare questa suddivisione. Da questa analisi possiamo dedurre una certa passività del lettore nella fruizione delle figure presenti nei libri di testo a parte alcuni casi nei primi anni di scolarità.

Ruolo delle figure. Si è inoltre scelto di catalogare il ruolo delle figure in relazione ai concetti presentati, indicando se nella figura è presente un *esempio*, un *non-esempio*²⁶, entrambi i tipi contemporaneamente o casi di *esempi* e *non-esempi collettivi* (Fig. 65, 1_4, p. 330 e Fig. 66, 1_4, p. 328), ossia figure che racchiudono più *esempi* o *non-esempi*.

26. Nella definizione data da Watson e Mason (2005, p. 65, traduzione degli autori), «i *non-esempi* sono esempi che dimostrano i confini e le condizioni necessarie di un concetto. [...] Così, $\frac{1}{5}$ è un *non-esempio* di frazione che corrisponde a un decimale periodico».

In un triangolo ogni lato può essere la sua **base**. Un triangolo ha **tre basi** a seconda di come viene ruotato sul piano.

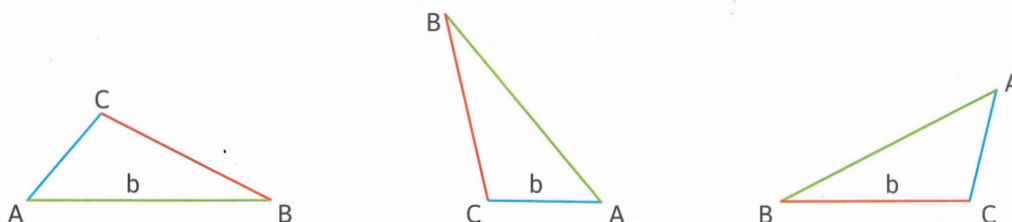


Fig. 65 - Caso di *esempio collettivo* (IV primaria).

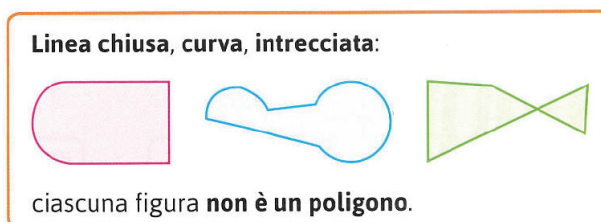


Fig. 66 - Caso di *non-esempio collettivo* (IV primaria).

Si è riscontrata una netta maggioranza di casi di *esempi*, pari al 97,16% (444 su 457), nessun caso di *non-esempio*, 4 casi in cui *esempio* e *non-esempio* sono compresenti (Fig. 67, 1_7, p. 422), alcuni casi, 6 e 4 rispettivamente, di *esempi* o *non-esempi* collettivi. Se si considera che il *non-esempio* è un utile strumento di riflessione didattica, allo scopo di apprendere in modo profondo le caratteristiche dell'oggetto geometrico presentato, soprattutto nel momento in cui viene introdotto, la mancata presenza di questo tipo risulta significativa.

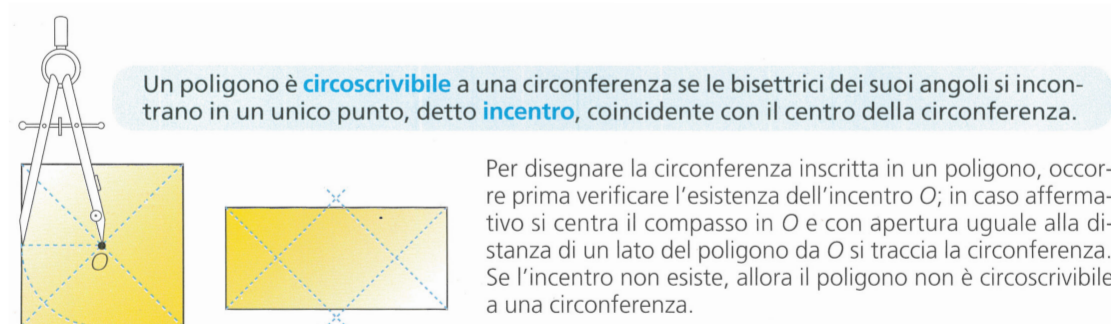


Fig. 67 - Caso che mostra sia un *esempio* sia un *non-esempio* (II secondaria di primo grado).

5.5.2 Gli aspetti multimodali nella relazione testo-figura

La relazione fra testo e figura nel libro di testo scolastico si caratterizza anche per importanti aspetti di multimodalità, indagati in Canducci, Rocci e Sbaragli (2021), che mettono in evidenza come, al di là delle specifiche rappresentazioni semiotiche degli enti matematici, esistano altri tipi di risorse semiotiche che incidono nella comprensione del concetto in gioco da parte del lettore. L'analisi si focalizza sulle risorse e sulle strategie semiotiche di tipo procedurale che manifestano *relazioni riformulative multimodali* (par. 3.3). In altre parole, alcuni usi di risorse quali il colore, linee orientate, disposizioni particolari di layout, stanno a indicare (cioè mettono in relazione) lo stesso concetto (attivando di fatto una riformulazione) espresso attraverso modalità semiotiche differenti (cioè multimodali). Nel nostro caso, emerge come l'uso di tali risorse e strategie possa favorire o ostacolare il processo cognitivo di *conversione* definito da Duval (par. 2.4) tra registro della lingua naturale e registro figurale, o come vi siano libri di testo dove tali risorse non vengono utilizzate per questo scopo. L'analisi coinvolge esclusivamente la parte introduttiva dell'argomento poligoni dei libri di testo italiani della scuola primaria; in tale parte vengono solitamente definiti e raffigurati gli elementi dei poligoni: vertici, lati, diagonali, angoli ecc.

Gli esempi proposti rientrano nelle seguenti tre categorie di analisi: "Uso del colore in funzione di similarità", "Prossimità di elementi nell'organizzazione spaziale" e "Segnalazione grafica attraverso linee orientate". Le prime due fanno riferimento esplicito a due principi gestaltici, già mutuati in ambito multimodale da Bateman (2008) sulla base del lavoro di Waller (1987): la similarità, definita come «la tendenza percettiva a raggruppare elementi perché sembrano essere simili per forma, colore, dimensione, suono e così via» (LaSpina, 1988, p. 97, traduzione degli autori) e la prossimità, definita come «la tendenza percettiva a raggruppare le cose che si trovano vicine l'una all'altra» (LaSpina, 1988, p. 97, traduzione degli autori). La terza categoria è spesso discussa negli studi sulla struttura del discorso dei documenti multimodali basati sulla pagina, e più specificamente, dei libri di testo. Da un lato, la direzionalità delle frecce guida lo sguardo e suggerisce al lettore una direzione di lettura (Bearne 2004, p. 22); dall'altro, la linea di collegamento suggerisce un'operazione di composizione del significato tra i blocchi collegati. Thibault (2001) ha esaminato gli elementi grafici di collegamento tra elementi di layout appartenenti a diverse modalità e ha osservato che il significato della struttura risultante non può essere ridotto alla semplice composizione dei significati dei blocchi collegati. I connettori, come linee o frecce, hanno una semantica propria. Secondo Thibault (2001) le frecce e i vettori simili che collegano una *etichetta* e un blocco *etichettato* hanno una semantica astratta che è simile a quella della copula verbale *essere*.

Vediamo ora di chiarire meglio le tre categorie di analisi individuate attraverso una descrizione puntuale; questa descrizione verrà accompagnata da esempi tratti

dai libri del corpus, nei quali le tre strategie semiotiche sono utilizzate in maniera efficace o inefficace per favorire la *conversione* semiotica. Vi sono anche casi in cui tali strategie sono utilizzate, ma non con l'intento di favorire il processo di *conversione* semiotica; questi casi sono discussi in modo approfondito nel già citato Canducci, Rocci e Sbaragli (2021), e non verranno qui trattati.

5.5.2.1 Uso del colore in funzione di similarità

Nei libri di testo, viene spesso utilizzato il colore come risorsa per indicare la corrispondenza fra elementi di vario tipo. Attraverso tale strategia, si invita il lettore a riconoscere uno stesso oggetto matematico proposto attraverso rappresentazioni in registri diversi, grazie al fatto che tali rappresentazioni sono presentate con lo stesso colore. In questo senso, la similarità di colore può essere intesa come la manifestazione di una relazione di riformulazione che invita il lettore alla *conversione* semiotica.

Uso efficace della strategia. Nel seguente esempio viene mostrato un utilizzo efficace di tale strategia (Fig. 68, 8_4, p. 95): le parole "lati", "vertici", "angoli" e "diagonali", presenti nella parte testuale linguistica di destra, sono colorate rispettivamente in viola, rosso, arancione e verde. Gli stessi colori vengono utilizzati per evidenziare gli elementi corrispondenti del poligono rappresentati in modo figurale a sinistra: i lati sono colorati in viola, i vertici in rosso, gli angoli in arancione e le diagonali in verde.

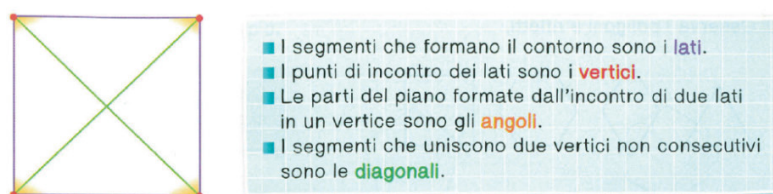


Fig. 68 – Uso efficace della *similarità di colore* nella parte figurale di sinistra e nella parte testuale di destra (IV primaria).

Uso inefficace della strategia. Anche nell'esempio riportato di seguito (Fig. 69, 6_3, p. 85), l'intento dei costruttori di senso sembra essere quello di utilizzare il colore con il fine di favorire un processo di *conversione* semiotica dal registro della lingua naturale a quello figurale, ma, contrariamente all'esempio visto in precedenza, la realizzazione di questo intento risulta meno efficace, e ciò è dovuto ad alcuni tratti di incoerenza e di ambiguità. Per l'angolo interno, il rosso è utilizzato sia negli elementi linguistici (nella parte testuale di sinistra e nell'etichetta a fianco

della figura), sia negli elementi figurali (nell'archetto utilizzato per rappresentare graficamente l'ente geometrico e nella freccia di collegamento fra quest'ultimo e la parola/termine etichetta "angolo interno"); lo stesso colore è però utilizzato anche in tutte le altre tre frecce di collegamento. Inoltre, se da un lato vi è *similitudine di colori* fra le rappresentazioni figurali degli enti angolo interno e vertice, e la parola/termine che li designa, tale similarità non viene realizzata nel caso del lato e della superficie: la parola "lato" è colorata in blu, mentre i lati del poligono sono colorati di azzurro nella rappresentazione figurale; nel caso della superficie, poi, si utilizza il nero nella rappresentazione linguistica, ma l'azzurro nella rappresentazione figurale.

Gli elementi di un poligono sono:

- i **lati**: segmenti che formano il confine;
- i **vertici**: punti di incontro di due lati;
- gli **angoli interni**: parti di piano compresi tra due lati.

La parte di piano occupata dal poligono si chiama **superficie** del poligono e la sua misura è l'**area**.

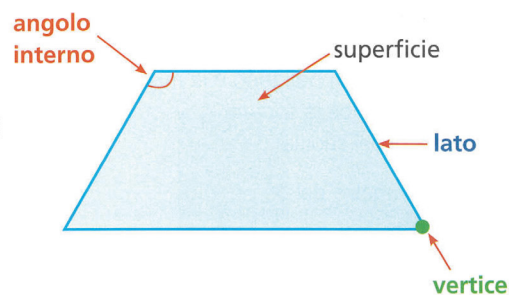


Fig. 69 – Uso ambiguo del colore, che non è efficace nel favorire la *conversione* semiotica (III primaria).

5.5.2.2 Prossimità di elementi nell'organizzazione spaziale

Anche il modo con il quale si dispongono vari elementi all'interno della pagina del libro può influenzare percettivamente il lettore. Così, se rappresentazioni diverse dello stesso oggetto matematico sono poste vicine fra loro, viene spontaneo pensare che vi sia un qualche tipo di collegamento fra le stesse; al contrario, se due rappresentazioni diverse dello stesso oggetto non sono in *prossimità*, il lettore non viene stimolato a riconoscere un collegamento tra questi elementi. Anche in questo caso, dunque, un certo utilizzo della *prossimità* nell'organizzazione dei contenuti interni alla pagina può essere interpretata come la manifestazione di una relazione di riformulazione che invita il lettore alla *conversione* semiotica. Tale invito può nuovamente risultare più o meno efficace a seconda delle scelte adottate.

Uso efficace della strategia. Nel caso seguente (Fig. 70, 4_3, p. 250), la figura è al centro della pagina; attorno a essa sono inseriti quattro parti di testo, ciascuna delle quali è posta in *prossimità* dell'elemento figurale corrispondente, al quale è collegato tramite frecce. Questo tipo di scelta comunicativa rende la consultazione più efficace, e consente al lettore di orientarsi dal punto di vista spaziale in modo da riconoscere una corrispondenza fra gli enti geometrici rappresentati nei due regi-

stri: figurale e linguistico. In sostanza, la *prossimità* spaziale tra elementi afferenti a registri semiotici diversi favorisce il lettore nel processo di *conversione* semiotica.

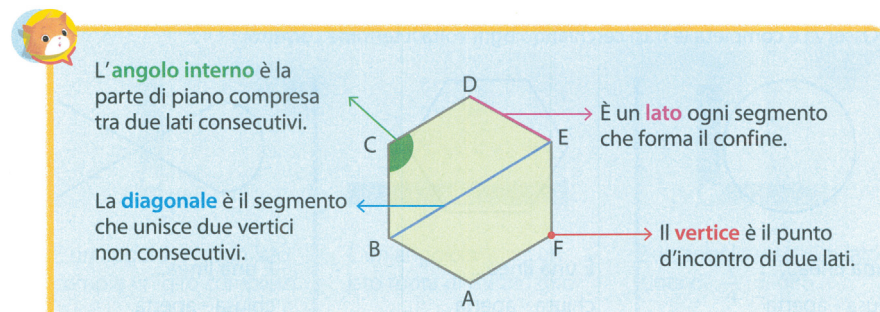


Fig. 70 – Uso efficace dell'*organizzazione spaziale* degli elementi per favorire il processo di *conversione* semiotica (III primaria).

Uso inefficace della strategia. Non sempre, però, questa organizzazione degli elementi all'interno della pagina è realizzata in modo coerente. Nell'esempio seguente (**Fig. 71**, 14_4, p. 310), l'*organizzazione spaziale* degli elementi sembra a prima vista efficace. Tuttavia, vi è un'incoerenza dal punto di vista di layout nel trattare gli enti geometrici superficie e perimetro. Consideriamo la frase "La parte di piano racchiusa dalla linea spezzata chiusa si chiama superficie". Tale frase – a tutti gli effetti una definizione dell'ente geometrico *superficie* di un poligono – non si trova in prossimità del riquadro etichetta "superficie", come negli altri casi riguardanti il vertice, il lato, la diagonale e l'angolo; essa è stata inspiegabilmente posizionata sotto alla definizione di perimetro.

D'altra parte, anche lo stesso perimetro è trattato in modo non chiaro. Infatti, contrariamente a quanto accade nei casi di vertice, lato, diagonale e angolo, la definizione di perimetro è preceduta e seguita da altre due definizioni: rispettivamente la definizione di contorno (per il quale, tra l'altro, non è presente nella porzione di pagina la corrispondente etichetta) e quella di superficie. A livello percettivo, questa scelta risulta incoerente a due livelli: da un lato non si rispetta la *prossimità spaziale* fra etichetta e definizione, dall'altro non si rispetta la corrispondenza uno-uno fra etichetta e definizione corrispondente.

Gli elementi del poligono

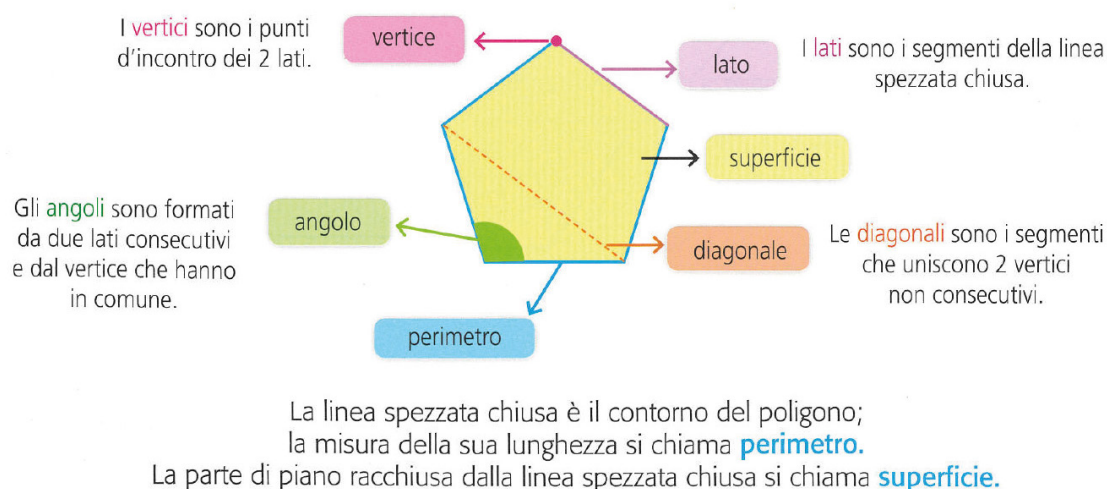


Fig. 71 – *Organizzazione spaziale non coerente degli elementi all'interno della pagina (IV primaria).*

Un altro fattore di incoerenza risiede nell'ambito più strettamente matematico. Infatti, il perimetro viene definito nell'esempio come grandezza associata al contorno del poligono. La stessa parola "perimetro" viene, però, utilizzata nell'etichetta che è a sua volta collegata tramite la freccia all'elemento figurale che rappresenta il contorno del poligono in esame (e non, appunto, il perimetro, che ne è la grandezza). In buona sostanza sembra che venga dato il nome di perimetro all'ente contorno, e cioè che venga considerato ente geometrico ciò che matematicamente è una grandezza. Tale incoerenza è rafforzata da due fattori: in primo luogo dall'utilizzo dello stesso colore, il blu, in tutti e quattro gli elementi, sia linguistici che figurali; in secondo luogo, dal fatto che tutti gli altri concetti geometrici presenti nella pagina riguardano enti matematici, e non le grandezze ad essi associate.

5.5.2.3 Segnalazione grafica attraverso linee orientate

Come segni di tipo procedurale, ossia segni che rappresentano un processo, nei libri di testo si fa abitualmente uso di linee orientate. Si tratta principalmente di frecce, cioè di elementi grafici con la proprietà di connettere e di avere un verso determinato. Questi segni, se utilizzati tra due rappresentazioni semiotiche espresse in registri diversi, possono essere interpretate come segnalazioni di riformulazioni che invitano il lettore alla *conversione* semiotica. Vediamo nuovamente due esempi, il primo dei quali riguarda un uso efficace di tale strategia, il secondo invece un uso non efficace.

Uso efficace della strategia. Nel seguente esempio (**Fig. 72**, 13_4, p. 302), le frecce presenti nella parte di sinistra hanno la funzione di indicare a quale elemento figurale fanno riferimento i tecnicismi “angolo interno”, “diagonale”, “vertice” e “lato”:

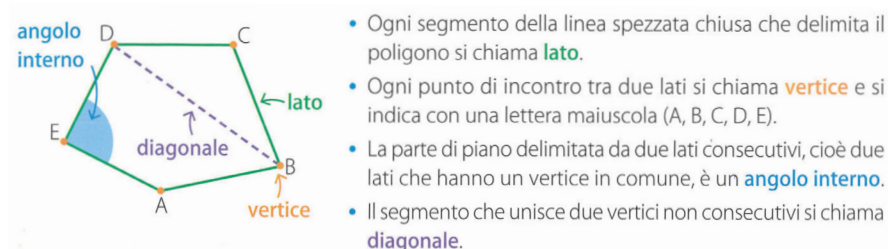
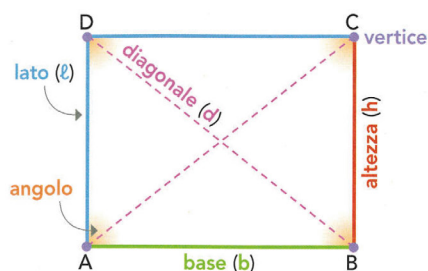


Fig. 72 – Uso delle frecce come elementi per favorire la *conversione* (IV primaria).

Uso inefficace della strategia. Nell'esempio seguente (**Fig. 73**, 5_4, p. 250), invece, il segno procedurale specifico (la freccia) che consente la connessione tra elementi è presente solo in due casi, il lato e l'angolo, mentre per gli altri quattro elementi, diagonale, altezza, vertice e base, non è presente. In questi ultimi casi, il modo con cui si realizza un collegamento percettivo tra elementi linguistici ed elementi figurali avviene tramite *prossimità* fra enti geometrici ed espressioni linguistiche per mezzo dell'*organizzazione spaziale*. La disomogeneità di scelta tra un elemento e l'altro all'interno della stessa unità comunicativa non risulta a nostro parere efficace, perché crea un certo tipo di “disturbo” nell'orientare percettivamente il lettore.



Per indicare un poligono usiamo tutte le lettere maiuscole dei suoi vertici: poligono **ABCD**.
 Per indicare lati e diagonali utilizziamo le lettere maiuscole con un trattino sopra: lati \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} ; diagonali \overline{AC} e \overline{BD} .
 Gli angoli si indicano con la lettera del vertice con sopra il simbolo dell'angolo: \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} .

Fig. 73 – Uso inefficace di risorse tipografiche di tipo misto in chiave deittica (IV primaria).

Da tutti questi esempi emerge come l'utilizzo di alcune strategie (*uso del colore con funzione di similarità*, *prossimità di elementi nell'organizzazione spaziale*, *segnalazione procedurale attraverso linee orientate*) non garantisce a priori la presenza di un invito efficace alla *conversione* semiotica fra rappresentazioni dello stesso ente

espresse attraverso registri semiotici differenti. Certamente occorre rendersi conto che esistono risorse che possono essere utilizzate, ma questo non basta: occorre anche utilizzarle in modo efficace e coerente, e quantomeno evitare che siano controproducenti in termini di costo interpretativo. Questi risultati ampliano notevolmente il quadro solitamente considerato: in particolare, emerge come i costruttori di senso non siano solo gli autori del libro, ma anche coloro che si occupano di aspetti tipografici e di layout della pagina. Tenere in considerazione anche questi aspetti potrebbe risultare importante per coloro che si occupano di didattica della matematica e in particolare riflettono sulle difficoltà connesse al delicato processo di insegnamento-apprendimento della disciplina. Apprendimento che, basandosi sul coordinamento fra rappresentazioni semiotiche diverse, risulta essere complesso: proprio per questo, occorre porre dunque attenzione a tutte le risorse e strategie che veicolano tale coordinamento.

Approfondimenti: tre casi di studio

In questo capitolo vengono presentati dei casi di studio che approfondiscono alcuni aspetti di analisi. Nello specifico, a livello di macro- e microatti, abbiamo scelto di concentrarci sul macroatto *logico-argomentativo*, che rappresenta uno dei movimenti testuali più articolati dei libri di testo scolastici, per il quale risulta interessante fare una riflessione concettuale e didattica in ottica interdisciplinare, e sul microatto *definizione*, che costituisce un enunciato sul quale si basa buona parte dell'apprendimento teorico della matematica, proposto in forma prevalentemente linguistica. Infine, esamineremo nel dettaglio alcune tendenze interpuntive, che, talvolta, possono avere conseguenze in termini di lettura e comprensione del testo matematico.

Si cercherà di offrire una visione ampia dei casi scelti, osservati nella realtà del testo scolastico, ma anche accennando ad alcuni aspetti di natura storico-descrittiva a cavallo fra le discipline, nella convinzione che questi aiutino a capirne più in profondità la conformazione attuale.

6.1 Il caso del movimento testuale logico-argomentativo

In questo paragrafo concentreremo l'attenzione sui movimenti testuali *espositivo-esplicativi* di tipo *logico-argomentativo*, cioè su quei macroatti che accompagnano il lettore nella costruzione del sapere attraverso prove, sperimentazioni (concrete o simulate) e confronti finalizzati a comprendere e a supportare un'asserzione (**par. 5.2.1**). L'intento è duplice: nel **paragrafo 6.1.1** cercheremo di delineare un quadro che ne consideri le modalità di realizzazione a livello disciplinare e linguistico, la presenza nei libri di testo del corpus a livello quantitativo, la sua evoluzione nel corso degli anni di scolarità¹; nel **paragrafo 6.1.2** discuteremo invece alcune lenti retoriche specifiche (*inventio*, *dispositio* ed *elocutio*) e mostreremo come sia possibile utilizzarle per analizzare argomentazioni matematiche.

6.1.1 Una lettura delle modalità dei movimenti logico-argomentativi nei libri di testo: dal fare all'astrarre

In questo paragrafo intendiamo portare l'attenzione sulle modalità *logico-argomentative* presenti nei libri di testo del corpus DFA-Italmatica. La scelta di collocare i movimenti *logico-argomentativi* nella famiglia dei macroatti *espositivo-esplicativi* appare giustificata se si considera una visione interdisciplinare del tema dell'argomentazione come quella che cercheremo di proporre, seppur brevemente, nel

1. Per una trattazione completa di questi aspetti si rimanda a Sbaragli, Canducci e Demartini (2021), di cui il presente capitolo rappresenta una sintesi.

prossimo paragrafo. Seguiranno due paragrafi dedicati a illustrare i criteri di analisi del testo adottati, per poi addentrarsi nella descrizione delle diverse modalità *logico-argomentative* (legate a *fare*, *immaginare* e *astrarre*) attraverso l'analisi e il commento di alcuni esempi significativi. Infine, verranno offerti dati quantitativi relativi alla distribuzione nel corpus.

6.1.1.1 Introduzione interdisciplinare al tema dell'argomentazione

Dal punto di vista dei contenuti, dei problemi a cui si rivolge e dei contesti in cui si è sviluppata, l'argomentazione è una disciplina antica, che trae origine prevalentemente nella pratica sofistica, nella dialettica socratico-platonica, nell'opera di Aristotele, e in seguito negli studi retorici d'epoca romana e medievale.

Imprescindibile per gli sviluppi fino alla modernità è la distinzione tra analitica, dialettica e retorica, operata principalmente da Aristotele nell'*Organon* e nella *Rhetorica*: nell'analitica si mettono in luce i meccanismi della deduzione, che parte da premesse vere per giungere a conclusioni logicamente fondate e necessariamente vere, e che andranno a costituire la base su cui si svilupperà tutto il pensiero logico-deduttivo matematico (D'Amore & Sbaragli, 2017); nella dialettica, parallela all'analitica, non ci si occupa del necessariamente vero, bensì del verosimile, ossia di opinioni, di tesi cui si aderisce con intensità variabile, ed è concepita dallo stesso Aristotele «come l'arte di ragionare partendo da opinioni generalmente accettate» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2013, p. 7); infine nella retorica, intesa da Aristotele come complementare alla dialettica, l'oggetto di studio è il ragionamento persuasivo nei confronti di un uditorio, e si insegna come si deve dire qualcosa (secondo quali schemi, seguendo quali criteri e con quali cautele) allo scopo di rendere efficace ciò che viene detto, producendo determinati effetti sull'uditore: convincerlo circa la credibilità di un'opinione, indurlo a compiere o ad astenersi dal compiere una data azione, portarlo a modificare certi suoi atteggiamenti, sentimenti ecc. (Cattani, 1994).

Se la distinzione fra analitica e dialettica risiede principalmente nel carattere di verità (nell'analitica) rispetto al carattere di plausibilità (nella dialettica) delle premesse da cui si parte nell'argomentare, la separazione tra dialettica e retorica poggia le sue motivazioni sulla distinzione tra ragionevolezza e persuasione nel discorso argomentativo rivolto a un uditorio: la dialettica è maggiormente focalizzata sugli aspetti di ragionevolezza del discorso; la retorica è invece più spostata sull'efficacia persuasiva dello stesso. Quest'ultima distinzione è sostanzialmente rimasta tale per duemila anni, fino all'avvento di quella che oggi è conosciuta come *teoria dell'argomentazione*, espressione con la quale si indica un filone di ricerche nato a metà del XX secolo, e che si distingue dagli studi classici principalmente per il tentativo di guardare all'argomentazione da un punto di vista organico, nel quale

convergono tanto la tradizione dialettica quanto quella retorica². Studi considerati oggi di base, come quello di Perelman e Olbrechts-Tyteca (2013), ma anche Toulmin (1975), hanno da un lato contribuito a fondare la *teoria dell'argomentazione*, i cui oggetti di studio sono «le tecniche discorsive atte a provocare o accrescere l'adesione delle menti alle tesi che vengono presentate al loro assenso» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2013, p. 6); dall'altro, dal nostro punto di vista, hanno fornito la base su cui fondare le discussioni circa i collegamenti fra argomentazione in senso classico e argomentazione nell'apprendimento della matematica. Ma che cosa si intende in generale per argomentazione, e in particolare per argomentazione in matematica?

Se si guarda all'etimologia del termine, si possono mettere in evidenza alcune caratteristiche distintive. Il termine "argomentazione" e il sostantivo "argomento" contengono la radice lessicale del verbo latino *arguo*, il cui significato principale è quello di *mettere in evidenza, portare a riconoscere*. Tradotto in termini attuali, dunque, l'espressione indica «il processo di "aiutare" l'interlocutore a riconoscere qualcosa fornendo (direttamente o indirettamente) una opportuna giustificazione» (Rigotti & Greco, 2009, p. 4, traduzione degli autori). In primo luogo, dunque, l'argomentazione, in qualsiasi ambito disciplinare ci si trovi (e dunque anche in matematica), non coincide con la sola affermazione di qualcosa (cioè con l'esplicitazione di stati di cose, idee, opinioni, proposte ecc., ossia di una *tesi*), perché a questa va necessariamente aggiunta una giustificazione.

Ma, come afferma Duval (1998, p. 6), «nella giustificazione di una affermazione, ha importanza separare bene due operazioni: la produzione di ragioni o di argomenti, e l'esame di accettabilità degli argomenti prodotti». Dal punto di vista del loro funzionamento cognitivo, la prima operazione dipende maggiormente dalla *spiegazione*, la seconda dal *ragionamento*. Pur riconoscendo delle distinzioni di tipo epistemologico e cognitivo tra la *spiegazione* e il *ragionamento*, lo stesso Duval sostiene come queste due operazioni siano di fatto complementari, e che spesso le giustificazioni espresse nei testi siano relativamente indifferenziate, mescolando accenni di spiegazione e accenni di argomentazione (Duval, 1998, p. 36). In quest'ottica, ci sembra sostenibile una posizione integrata, cioè una visione nella quale un'argomentazione – soprattutto laddove viene presentata in un testo per far comprendere a uno studente un risultato matematico – può contenere al suo interno aspetti legati tanto alla spiegazione quanto all'argomentazione in senso stretto, in un equilibrio che può essere spostato a volte più sull'una o sull'altra.

2. Ricostruire storicamente i passaggi, tutt'altro che banali, che hanno portato dalla visione tradizionale legata alla dialettica e retorica classica alla moderna *teoria dell'argomentazione* è un'impresa che esula dagli scopi di questo contributo. Per un approfondimento si rimanda a van Eemeren (2013) e Rigotti e Greco (2019).

Al di là di questa breve ma indispensabile premessa, ciò che ci è parso interessante è stato addentrarsi nelle varie modalità con le quali i movimenti testuali di tipo *logico-argomentativo* possono essere presentati al lettore di un libro di testo di geometria. Nell'analizzare i libri di testo, infatti, ci siamo resi conto di come tali modalità siano tutto sommato in linea con una visione storica dell'evoluzione della disciplina, mentre meritano alcune considerazioni relative all'apprendimento della matematica da parte degli studenti. Nel prossimo paragrafo tenteremo di ripercorrere sinteticamente queste riflessioni.

6.1.1.2 Dal fare all'astrarre

Per poter analizzare in modo significativo i movimenti testuali di tipo *logico-argomentativo*, abbiamo in primo luogo tenuto in considerazione il passaggio dal mondo concreto al mondo astratto avvenuto nella storia della matematica. Le origini della matematica in quanto disciplina organizzata sono infatti da ricercare nelle esigenze concrete dell'uomo legate alla sua relazione con il mondo circostante. È appunto innegabile che le forme più antiche di matematica fossero legate alle necessità quotidiane dell'uomo, e che solo con il pensiero greco questo ancoraggio alla realtà e al fare sia andato via via ristrutturandosi, fino a diventare una disciplina tendente all'astrazione, ma mai completamente staccata dal mondo dei sensi (D'Amore & Sbaragli, 2017; 2018; 2019; 2020).

Come afferma Bagni (1996, p. 2),

Il "fare matematica" si svincolò, lentamente ma radicalmente, dalle quotidiane necessità pratiche del contare, del misurare, del calcolare, per divenire un inedito ed assai più impegnativo "pensare matematica". Non avremo più, con la grande geometria greca, l'esame e l'analisi di "una" singola situazione, in uno studio finalizzato alla particolare descrizione quantitativa di essa; bensì giungeremo all'esame ed all'analisi di "tutte" le situazioni analoghe ad una data (oppure immaginata), verso la comprensione e la descrizione delle caratteristiche che accomunano esempi, figure, casi anche quantitativamente assai diversi, ma logicamente equivalenti.

Questa esigenza del *fare* per poi giungere successivamente all'*astrarre* si riflette, come è naturale, anche nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. L'importanza dell'agire concretamente e del manipolare oggetti nelle prime fasi di apprendimento viene ribadita dalle scienze cognitive, che hanno ormai stabilito la centralità dell'esperienza fisica e corporea nel processo di costruzione, comunicazione e apprendimento della matematica, come sostenuto ad esempio dalla teoria dell'*embodiment* (Lakoff & Nùñez, 2005) o dalle neuroscienze, che pos-

siamo riassumere con la seguente citazione: «il nostro corpo ci induce (ci vincola) a “pensare matematicamente” nonché ad “esprimerci matematicamente” in un certo modo» (Bagni, 2009, p. 82). Il passaggio dal *fare* all'*astrarre* è dunque uno dei nodi centrali dell'apprendimento della matematica.

Partendo da queste premesse, abbiamo rilevato tre modalità di movimenti *logico-argomentativi*, che sfruttano processi diversi tra loro e con gradi di coinvolgimento differenti: si va da casi in cui il lettore è chiamato a partecipare in prima persona alla costruzione del ragionamento attraverso azioni concrete di varia natura (macroatto con modalità che fa *fare*), a casi ibridi in cui il lettore è chiamato a immaginare azioni sugli oggetti geometrici cui ci si riferisce, senza eseguirle concretamente (macroatto con modalità che fa *immaginare*), a casi infine in cui l'attività concreta lascia il campo al pensiero astratto, per mezzo del quale si costruisce l'argomentazione (macroatto con modalità che fa *astrarre*).

6.1.1.3 Criteri “italmatici” di analisi delle modalità dei movimenti testuali logico-argomentativi

Dal punto di vista della didattica della matematica, può essere utile analizzare le modalità dei movimenti testuali *logico-argomentativi* attraverso le distinzioni introdotte da Balacheff (1987; 1988; 2001) nell'affrontare il tema della *prova* in matematica. Tali distinzioni sono particolarmente efficaci nel nostro contesto, perché richiamano al loro interno tanto le dimensioni intrinsecamente presenti nella disciplina, quanto alcune riflessioni di tipo linguistico. Nei suoi studi, l'autore si pone il problema del passaggio nella didattica da quelle che egli chiama *prove pragmatiche*, ossia le prove fondate sull'azione effettiva operata su rappresentazioni di oggetti matematici, a quelle che egli chiama *prove intellettuali*, ossia a prove staccate dall'azione ed espresse tipicamente attraverso delle condotte linguistiche che esprimono gli oggetti, le loro proprietà e le relazioni in gioco.

Nelle *prove pragmatiche* sono centrali il cosiddetto *linguaggio della familiarità* – che porta i segni del tempo e della durata, di colui che agisce e del contesto della sua azione – e l'ostensione, ovvero l'atto di mostrare e di esporre alla vista e all'atto pratico. È evidente la peculiarità di queste due dimensioni nella didattica della matematica, che, per arrivare a oggetti astratti, non può fare altro che passare attraverso rappresentazioni concrete. Nelle *prove intellettuali* si tende invece ad abbandonare il *linguaggio della familiarità* a favore di un linguaggio che diventa sempre più *decontestualizzato*, dunque distante da uno specifico oggetto rispetto a cui vengono attuate azioni, per accedere a classi di oggetti; *depersonalizzato*, cioè separato dall'azione (potremmo anche dire *deagentivizzato*); *dtemporalizzato*, ossia assoluto, non legato a episodi e privo di cronologia.

Il passaggio dalle *prove pragmatiche* alle *prove intellettuali* non è per nulla banale, e prevede secondo Balacheff quattro stadi intermedi:

- l'*empirismo naïf*, nel quale la validità di un enunciato viene assicurata dopo la verifica su qualche caso; rappresenta una delle prime forme di generalizzazione degli studenti a tutti i livelli di scolarità;
- l'*esperienza cruciale*, in cui il risultato di una prova permette di scegliere in maniera netta tra due ipotesi; tale esperienza serve in alcuni casi per decidere tra una proposizione e la sua negazione;
- l'*esempio generico*, nel quale si esplicitano le ragioni della validità di un'asserzione mediante la realizzazione di operazioni o di trasformazioni su un oggetto esaminato non in quanto tale, ma come rappresentante caratteristico di una classe di oggetti;
- l'*esperienza mentale*, nella quale si invoca l'azione interiorizzata distanziandosi dalla realizzazione su un rappresentante particolare; questa prova segna il passaggio dalle *prove pragmatiche* a quelle di tipo *intellettuale*.

Nel commentare secondo queste distinzioni gli esempi che verranno mostrati nel prossimo paragrafo, sarà dunque importante prestare attenzione al tipo di validazione matematica adottata, la quale dipende anche dal linguaggio utilizzato, che può essere più o meno ancorato al *linguaggio della familiarità* indicato da Balacheff. Oltre agli elementi sintattici e lessicali che individuano la presenza di tale linguaggio nei testi, però, esistono altre espressioni e forme interessanti da evidenziare. È il caso ad esempio dell'uso di connettivi quali spie linguistiche di un certo tipo di discorso matematico. Duval (1998) identifica in questo senso tre tipi di connettivi³: i *connettivi combinatori*, tipici delle dimostrazioni matematiche (ne sono esempi il *se... allora*, la *o* esclusiva, la *o*, la *e*, molto utilizzati in matematica); i *connettivi argomentativi*, per Duval tipici delle argomentazioni, che mettono in rapporto reciproco due affermazioni e che possono essere distinti in *connettivi di co-orientamento* (*anche*), e in *connettivi di contro-orientamento* (*ma, anche se, benché, tuttavia*); infine i *connettivi organizzativi*, per Duval tipici della spiegazione, che indicano lo statuto di una proposizione in rapporto ad altre proposizioni, determinando quindi il suo posto nell'organizzazione del discorso: *di conseguenza, quindi, dunque, perciò* (collegano una tesi se questa segue gli argomenti); *si sa che, in base a* (introducono una regola generale); *perché, poiché*,

3. Esistono in linguistica molte classificazioni dei connettivi, più o meno vaste e finalizzate a mettere in luce differenti potenzialità e funzioni di questa ampia e aperta classe di parole. Per una tipologia dei connettivi come elementi che esplicitano le relazioni logiche di un testo a livello di rapporti fra gli eventi e di composizione testuale si rimanda a A. Ferrari (2014; 2019), e Ferrari e Zampese (2016).

infatti, considerato/visto che (introducono gli argomenti); *tranne che, a meno che* (introducono la possibilità che esistano dati ed elementi che conducono a conclusioni diverse). Nonostante la presenza di questo tipo di *connettivi* possa orientare nel riconoscere le peculiarità di un discorso argomentativo, lo stesso Duval mette in guardia dal pensare che a un uso, ad esempio, di quelli da lui indicati come *connettivi combinatori* corrisponda automaticamente la presenza di una spiegazione, perché una stessa parola o espressione può essere impiegata come *connettivo combinatorio, argomentativo o organizzativo* a seconda del particolare contesto in cui ci si trova.

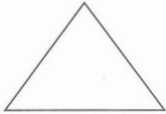
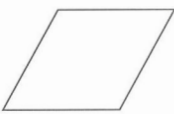
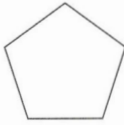
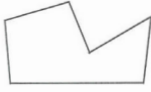
6.1.1.4 Esempi di modalità dei movimenti testuali logico-argomentativi analizzati secondo criteri “italmatici”

Presentiamo un esempio per ciascuna delle modalità con le quali abbiamo distinto i movimenti testuali *logico-argomentativi* nei libri di testo scolastici presenti nel corpus (par. 5.2), analizzati secondo l’ottica interdisciplinare sopra proposta. Nel seguire un ragionamento di tipo argomentativo i movimenti passano dal *fare*, all’*immaginare* fino all’*astrarre*, seguendo l’evoluzione avvenuta nella storia e che si rintraccia nelle pratiche proposte nei libri di testo e nella didattica in classe.

Il seguente esempio (Fig. 1, 10_3, p. 85) rientra tra i movimenti *logico-argomentativi* con la modalità di tipo *fare*, nei quali il lettore è chiamato a partecipare in prima persona alla costruzione del ragionamento attraverso azioni concrete di varia natura. Per essere complete, queste argomentazioni necessitano dell’azione del lettore, il quale viene appunto coinvolto attraverso consegne inserite all’interno dell’argomentazione stessa. Queste consegne possono riguardare azioni da svolgere direttamente sul libro di testo, in cui sono stati volutamente lasciati spazi vuoti da riempire, come se l’argomentazione fosse un «puzzle da ricostruire, puzzle per il quale mancherebbero dei pezzi da trovare prima di assemblarli» (Duval, 1998, p. 30), oppure in altri casi propongono azioni da effettuare al di fuori del libro di testo, come ritagliare fogli di carta, disegnare, utilizzare strumenti quali riga e compasso. L’esempio qui mostrato rientra nel primo caso (rimandiamo a Sbaragli, Canducci & Demartini (2021) per un esempio del secondo).

In questo esempio, lo studente è dapprima chiamato a operare sui poligoni rappresentati nel testo attraverso alcune azioni specifiche: ripassare di rosso i lati, segnare di verde i vertici e colorare di blu gli angoli. Una volta fatto questo, il testo richiede un ulteriore coinvolgimento del lettore nel completare alcune informazioni circa il numero di lati, vertici e angoli di ciascuno dei poligoni su cui ha agito. Infine, il lettore viene invitato a completare, attraverso l’inserimento delle parole “vertici” e “angoli”, l’affermazione che rappresenta la tesi dell’argomentazione: “in un poligono il numero dei lati è uguale al numero dei... e al numero degli...”.

1 In ogni poligono ripassa di **rosso** i lati, segna di **verde** i vertici e colora di **blu** gli angoli interni. Poi completa e rispondi.

TRIANGOLO	QUADRILATERO	PENTAGONO	ESAGONO
			
Numero lati:	Numero lati:	Numero lati:	Numero lati:
Numero vertici:	Numero vertici:	Numero vertici:	Numero vertici:
Numero angoli:	Numero angoli:	Numero angoli:	Numero angoli:

• Che cosa hai scoperto? Completa.
In un poligono il numero dei lati è uguale al numero dei

Fig. 1 – Movimento testuale logico-argomentativo con la modalità di tipo *fare* (III primaria).

Dal punto di vista del livello di validazione, ci troviamo davanti all'invito a realizzare una *prova pragmatica*, più nello specifico a quello che Balacheff chiama *empirismo naïf*: dopo aver verificato concretamente l'equinumerosità fra lati, vertici e angoli di un triangolo, di un quadrilatero, di un pentagono e di un esagono, si generalizza a qualsiasi poligono. Dal punto di vista linguistico, il brano è disseminato di verbi iussivi quali *ripassa*, *segna*, *colora*, *completa*, *rispondi*, che, insieme alla domanda diretta "che cosa hai scoperto?", sono indicatori di un *linguaggio familiare* per lo studente: da un lato il testo utilizza la seconda persona singolare per rivolgersi direttamente al lettore, coinvolgendolo; dall'altro, attraverso il verbo al passato ("hai scoperto"), si pongono le azioni dello studente in un preciso ordine temporale di cui è egli stesso protagonista. Infine, va notato che il fatto che i quattro poligoni su cui si è lavorato siano dei casi particolari non è indicato (e in III primaria non è scontato che il bambino ne sia consapevole), né vi è una spia linguistica (ad esempio un *connettivo*) che accompagna il passaggio alla generalizzazione: il "*filo argomentativo*" (*strand*, secondo Kopperschmidt, 1985) che dovrebbe generarsi fra prove particolari e asserzione finale (la *tesi*) è implicito e lasciato costruire all'allievo, al quale spetta anche il compito di completare il testo "bucato" delle tesi stesse.

Da questo caso emerge chiaramente come questa modalità di movimento testuale trae la sua efficacia non tanto dal proporre argomentazioni *tout court*, da leggere e comprendere, quanto piuttosto dallo spingere il lettore ad affiancare alla lettura del testo atti da svolgere concretamente. In questo modo, chi legge può giungere a persuadersi del risultato, perché esso fa leva su esperienze che egli realizza personalmente, ma può anche convincersi della ragionevolezza dello stesso, poiché è portato a scoprire attivamente gli snodi logici e concettuali dell'argomentazione. Ciò mette in luce una peculiarità del libro di testo, soprattutto per i bambini e i ragazzi più giovani: se normalmente l'argomentazione è un atto che

ci vede nettamente collocati in un ruolo comunicativo (o argomentiamo o siamo i destinatari di un'argomentazione), nell'esempio qui riportato il destinatario è anche compartecipe della costruzione argomentativa stessa.

Nel seguente esempio (Fig. 2, 11_5, p. 325), che rientra tra i movimenti testuali con la modalità di tipo *immaginare*, il lettore è chiamato a immaginare azioni sugli oggetti geometrici cui ci si riferisce, senza eseguirle concretamente. Non si tratta dunque di un *fare* concreto, ma di immaginare la situazione proposta. L'atto dell'*immaginare* può essere favorito dal libro tramite diversi tipi di espedienti grafici, oltre che da indicatori linguistici espliciti, come in questo caso l'utilizzo del verbo *immagina*.

In questo movimento *logico-argomentativo* si vuole giustificare la formula dell'area di un poligono regolare. Nella parte di sinistra troviamo la descrizione linguistica della procedura con la quale un qualsiasi poligono regolare può essere trasformato in un romboide equiesteso; nella parte di destra viene affiancata una rappresentazione grafica della procedura stessa, nella quale sono presenti elementi grafici che aiutano a immedesimarsi nell'atto di ritagliare (la bambina con le forbici) e a rendere visivamente il susseguirsi dei vari passaggi (le frecce). Il tutto è seguito da una parte, in forma verbale scritta e simbolica (con simboli matematici), nella quale si presenta la conclusione del ragionamento che porta a esplicitare la formula dell'area di un poligono regolare.

Area e formule inverse

Per calcolare l'area di un poligono regolare dobbiamo considerare i triangoli uguali in cui la figura può essere divisa: **immagina** di ritagliare i triangoli del poligono regolare a lato e di posizionarli come vedi, quindi di **raddoppiare i triangoli** per formare un **romboide**. Ora osserva il romboide:

- la **base** è data dalla somma dei lati del poligono regolare, cioè dal suo **perimetro**;
- l'**altezza** corrisponde all'**apotema**;
- la superficie del romboide corrisponde al **doppio della superficie** del poligono regolare.

Perciò...

L'area del romboide ➤

$$\text{area} = \text{base} \times \text{altezza}$$

L'area del poligono regolare ➤

$$\text{area} = (\text{perimetro} \times \text{apotema}) : 2$$

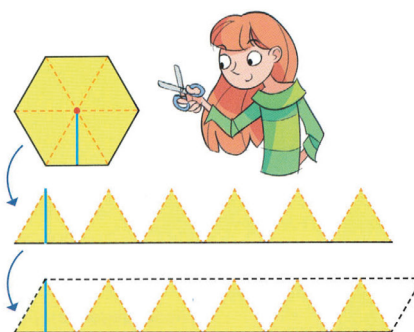


Fig. 2 – Movimento testuale *logico-argomentativo* con la modalità di tipo *immaginare* (V primaria).

Anche questa modalità di movimento *logico-argomentativo* presenta elementi di similarità con le *prove pragmatiche*, perché in essa vengono richiamate azioni da svolgere su rappresentazioni di oggetti geometrici; questo movimento però

presenta anche caratteristiche peculiari di una validazione più avanzata, che fa riferimento a quelli che Balacheff (2001, p. 14) chiama *esempi generici*. Rispetto alle prove pragmatiche più basilari basate sull'*empirismo naïf*, nell'esempio generico perde di centralità l'azione concreta svolta su un oggetto specifico: esso consiste piuttosto «nell'esplicitazione delle ragioni della validità di un'asserzione mediante la realizzazione di operazioni o di trasformazioni su un oggetto esaminato non più per sé stesso, ma in quanto rappresentante caratteristico di una classe». In questo caso, infatti, l'esagono in figura non è esaminato tanto in quanto esagono, ma come rappresentante caratteristico della classe dei poligoni regolari.

Dal punto di vista linguistico, anche in questo caso si ritrovano elementi di coinvolgimento tipici del *linguaggio della familiarità* elementi *agentivizzanti*, come l'uso della seconda persona singolare nei verbi imperativi *immagina*, *vedi* e *osserva* e alcune forme attive e personali dei verbi riferiti agli elementi geometrici (come *corrisponde*); elementi *temporalizzanti* e *contestualizzanti*, come l'uso dell'avverbio di tempo *ora*. È comunque notevole osservare, in questa prima parte di testo – che in parte sembra voler parlare al bambino –, l'impiego del connettivo *quindi* (riga 4), per nulla scontato: esso infatti non ha il più comune valore di consecuzione, ma il più raro valore temporale di successione (*immagina di ritagliare "quindi = poi" [immagina] di raddoppiare*). Insomma, è un tipico esempio di lingua della matematica nel testo scolastico che presenta diversi modi e stili espressivi in poche righe, esprimendo una tensione costante tra familiarità e modi tipici del discorso scientifico.

Lo conferma il fatto che agli elementi e ai modi di tono più colloquiale si affiancano alcuni tratti via via più impersonali (come l'alto uso di infiniti o la forma *data*, nel primo punto elenco), tipici di un'argomentazione che si distacca, seppur gradualmente, dal *linguaggio della familiarità*, tendendo maggiormente al discorso scientifico più classico: è significativo anche l'impiego, enfatizzato, del connettivo *perciò*, che da un lato esplicita la connessione tra gli argomenti che supportano il ragionamento e la tesi conclusiva, e dall'altro introduce un tratto lessicale della dimensione argomentativa, il cui uso non è così comune per questi anni di scolarità⁴; inoltre è interessante osservare che al *perciò* segue una parte di testo che contiene un maggior ricorso a simboli specifici della matematica, quali l'uguale, il simbolo di moltiplicazione e quello di divisione nell'esprimere il risultato finale. Il connettivo sembra insomma anche assumere il valore di demarcare un cambio di stile testuale, caratterizzato da un aumento della condensazione e del tecnicismo.

Ribadiamo che, presa da sola, la parte linguistica di sinistra non è autosufficiente ai fini di un'argomentazione convincente: soprattutto non si evince dalla sola let-

4. Il *perciò* nei movimenti *logico-argomentativi* di quinta primaria compare solo 18 volte su un totale di circa 14'000 parole grafiche.

tura del testo il modo in cui occorre disporre i triangoli che compongono l'esagono per ottenere il romboide. Per compensare questa necessità, essa viene affiancata da una componente figurale nella parte destra della pagina, nella quale si stimola nel lettore la visualizzazione mentale dei procedimenti pratici descritti nella parte linguistica⁵. Questa scelta è tra l'altro indicativa di come il libro di testo abbia tra i suoi intenti non solo quello di condurre un'argomentazione corretta, ma anche di facilitarne la comprensione di chi legge attraverso l'utilizzo di vari mezzi semiotici necessari. In questo senso, l'argomentazione in un libro di testo scolastico possiede per forza di cose anche una natura esplicativa. I procedimenti pratici sono a tutti gli effetti già svolti dal libro di testo: il lettore deve solo riconoscerli attraverso un'attività di decodifica delle informazioni linguistiche e figurali, grazie alle quali si sostiene la ragionevolezza della conclusione.

Il terzo esempio (**Fig. 3**, 7_7, p. 63) rientra nei movimenti testuali *logico-argomentativi* con la modalità di tipo *astrarre*: il lettore è chiamato ad astrarre, cioè ad allontanarsi dalla realtà immediata; l'attività concreta lascia dunque il campo al pensiero astratto, per mezzo del quale si costruisce l'argomentazione. In questo caso si vuole dimostrare che un qualsiasi triangolo è sempre inscrittibile in una circonferenza. Anche in questo movimento testuale troviamo una parte linguistica a sinistra, nella quale si propone una concatenazione di argomenti di tipo geometrico, esplicitando teoremi e termini utili al ragionamento:

Consideriamo un triangolo generico ABC e tracciamo gli assi dei tre lati (**figura 2**). Le tre rette si intersecano sempre in un unico punto O che è il circocentro del triangolo. Sappiamo che tale punto è equidistante dai vertici pertanto possiamo sempre tracciare una circonferenza con centro in O e raggio uguale a $OA = OB = OC$. Per questo motivo:

PROPRIETÀ. Il triangolo è sempre **inscrittibile** in una circonferenza.

Figura 2

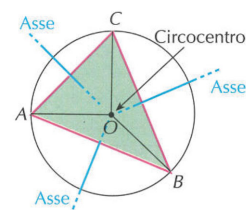


Fig. 3 – Movimento testuale *logico-argomentativo* con la modalità di tipo *astrarre* (Il secondaria di primo grado).

Questa modalità di movimento *logico-argomentativo* presenta elementi di contatto con le *prove intellettuali* di Balacheff, ossia prove «staccate dall'azione, iscritte nelle condotte linguistiche che esprimono gli oggetti e le loro proprietà, e che esprimono le loro relazioni» (Balacheff, 2001, p. 9); queste prove non poggiano

5. Per un approfondimento delle relazioni tra parte linguistica e le figure si veda il **paragrafo 5.5**.

più su azioni da svolgere sulla rappresentazione dell'oggetto geometrico, e il linguaggio «è segnato dall'introduzione di un lessico specifico e di simboli» (Balacheff, 2001, p. 11).

Le informazioni veicolate in forma linguistica si susseguono una dopo l'altra, giustapposte, e il filo che le lega è compreso solo se il lettore sa muoversi agilmente nel lessico e nelle strutture comunicative della disciplina: infatti, perché la prima frase e la seconda risultino chiare è necessario capire che "gli assi dei tre lati" e "le tre rette" fanno riferimento a uno stesso ente (stanno cioè in una relazione di coreferenza, in quanto rimandano a uno stesso referente). Il primo *connettivo* che compare è *pertanto*, che segnala ciò che consegue al ragionamento ripercorso e mostrato ("possiamo sempre tracciare una circonferenza..."). Tale ragionamento è accompagnato da una figura esemplificativa nella parte di destra, nella quale viene mostrata la costruzione geometrica cui si sta facendo riferimento nella parte scritta; a tutto ciò segue un box colorato e dal contorno tratteggiato nel quale viene esplicitata la tesi finale (qui chiamata "Proprietà"), introdotta dal sintagma "Per questo motivo" (che segnala una ulteriore relazione di causa: l'ultima, quella che porta alla proprietà scoperta).

Il punto di partenza linguistico di tale movimento propone i modi linguistici e le formulazioni più tipiche della disciplina: si dichiara che cosa si andrà ad analizzare (con verbo alla seconda plurale – almeno grammaticalmente inclusivo di chi scrive e di chi legge – molto tipico: *consideriamo*) e ciò che si vuole fare (*tracciamo gli assi*). Sempre nella prima frase, l'utilizzo del termine "generico" pone il lettore nuovamente all'interno di un *esempio generico*: il triangolo ABC è un rappresentante della classe dei triangoli e viene utilizzato per poter sostenere che le affermazioni sul circocentro, cioè l'intersezione degli assi di ciascun lato, come punto equidistante dai vertici e dunque centro della circonferenza inscritta, possono essere estese per ogni triangolo. Il testo procede proponendo al lettore termini specialistici della disciplina (*intersecano, circocentro, equidistante*), di uso non comune, e simbolismi (l'uguaglianza " $OA=OB=OC$ "). Insomma, il testo è permeato di espressioni linguistiche e simbolismi che poco hanno a che fare con il *linguaggio della familiarità* tipico delle prime forme di validazione matematica. Anche l'uso dei *connettivi organizzativi* è significativo, e tipico di un'argomentazione: *sappiamo che* introduce una premessa alla quale segue, come indicato dal connettivo *pertanto*, la tesi del movimento testuale riferita all'esempio generico mostrato in figura; questa conclusione a sua volta funge da premessa alla tesi conclusiva del movimento, come indicato dal connettivo di valore consecutivo *per questo motivo*, tesi nella quale si generalizza l'inferenza al triangolo qualsiasi, attraverso l'uso dell'articolo con valore generico *//*.

In questo tipo di movimento testuale il coinvolgimento del lettore con il testo è minimo: egli non è chiamato a eseguire o immaginare azioni, ma solamente a se-

guire, quasi esclusivamente tramite la lettura del testo scritto, il ragionamento che gli si sta proponendo. In quest'ottica, potremmo dire che si fa leva maggiormente sul carattere di ragionevolezza piuttosto che su quegli aspetti di coinvolgimento esperienziale tipicamente più incisivi dal punto di vista della persuasione. In definitiva, in questo esempio emergono un graduale distacco dal concreto a favore dell'astrazione e un uso sempre più marcato di proprietà e simboli tipici della matematica teorica, fino a giungere al quasi completo abbandono del *linguaggio della familiarità*.

6.1.1.5 L'evoluzione dei movimenti testuali logico-argomentativi nel corpus

Dopo aver chiarito tipologicamente le categorie, in questo paragrafo intendiamo approfondire in modo più puntuale alcune riflessioni accennate nel **paragrafo 5.2.3** a proposito dei dati quantitativi relativi ai movimenti testuali di tipo *logico-argomentativo* presenti nel corpus. Questo può risultare interessante perché, come vedremo, ci consentirà ad esempio di mettere in evidenza la mancanza di gradualità nei passaggi, da un anno scolastico all'altro, tra le diverse modalità argomentative prima individuate; mancanza che può avere ripercussioni dal punto di vista di chi apprende. Come già effettuato per i dati quantitativi globali dei macroatti, anche in questo caso terremo distinte le analisi effettuate nel corpus italiano e in quello svizzero.

L'evoluzione delle modalità argomentative nel corpus italiano. La seguente tabella (**Tab. 1**) mostra le quantità complessive dei diversi tre tipi di movimenti *logico-argomentativi*, espresse in forma numerica e percentuale, presenti nei libri di testo italiani del corpus (129 libri di testo in totale, di cui 83 di scuola primaria e 46 di scuola secondaria di primo grado):

Modalità di movimenti <i>logico-argomentativi</i>	Quantità nel corpus italiano	Quantità nella scuola primaria	Quantità nella scuola secondaria di primo grado
Modalità di far <i>fare</i>	301 (21,76%)	284 (60,81%)	17 (1,85%)
Modalità di far <i>immaginare</i>	541 (39,12%)	176 (37,69%)	365 (39,85%)
Modalità di far <i>astrarre</i>	541 (39,12%)	7 (1,50%)	534 (58,30%)
Totale	1'383 (100%)	467 (100%)	916 (100%)

Tab. 1 – Distribuzione delle modalità di movimenti *logico-argomentativi* nel corpus italiano.

Globalmente sono stati individuati 1'383 movimenti testuali di tipo *logico-argomentativo* su un totale di 5'783 movimenti testuali (comprendente gli altri tipi presentati nel **par. 5.2**), corrispondente al 23,91%. I movimenti *logico-argomentativi* presenti in quantità maggiore sono, in ugual numero, quelli con la modalità *immaginare* e quelli con la modalità *astrarre* (541, il 39,12%), mentre i movimenti con la modalità di tipo *fare* risultano essere i meno presenti (301, il 21,76%). L'*ex aequo* tra le modalità di tipo *immaginare* e *astrarre* è a tutti gli effetti una coincidenza, come emerge se si considera la ripartizione dei dati fra scuola primaria e scuola secondaria di primo grado (**Tab. 1**).

Questa ripartizione consente anche di notare il brusco cambiamento nelle percentuali delle modalità di tipo *fare* e *astrarre* nel passaggio tra scuola primaria e secondaria di primo grado: la prima modalità passa dal 60,81% all'1,85%; la seconda, per contro, passa dall'1,50% al 58,30%. Per approfondire meglio questo e altri aspetti, è significativo analizzare l'evoluzione delle tre modalità di tipi di movimento lungo tutti gli anni di scolarità considerati, dalla II primaria (SP) alla III secondaria di primo grado (SSPG). Mostriamo, dunque, ancora più nel dettaglio, questa evoluzione attraverso una tabella (**Tab. 2**) e un grafico a colonne (**Fig. 4**):

Modalità di movimenti <i>logico-argomentativi</i>	Quantità nel corpus italiano						
	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Modalità di far <i>fare</i>	22 (88,00%)	51 (86,44%)	127 (52,05%)	84 (60,43%)	15 (3,01%)	2 (0,51%)	0 (0%)
Modalità di far <i>immaginare</i>	3 (12,00%)	8 (13,56%)	116 (47,54%)	49 (35,25%)	235 (47,09%)	124 (31,71%)	6 (23,08%)
Modalità di far <i>astrarre</i>	0 (0%)	0 (0%)	1 (0,41%)	6 (4,32%)	249 (49,90%)	265 (67,77%)	20 (76,92%)
Totale	25 (100%)	59 (100%)	244 (100%)	139 (100%)	499 (100%)	391 (100%)	26 (100%)

Tab. 2 – Distribuzione delle tre modalità di movimenti *logico-argomentativi* nei libri di testo nei diversi anni.

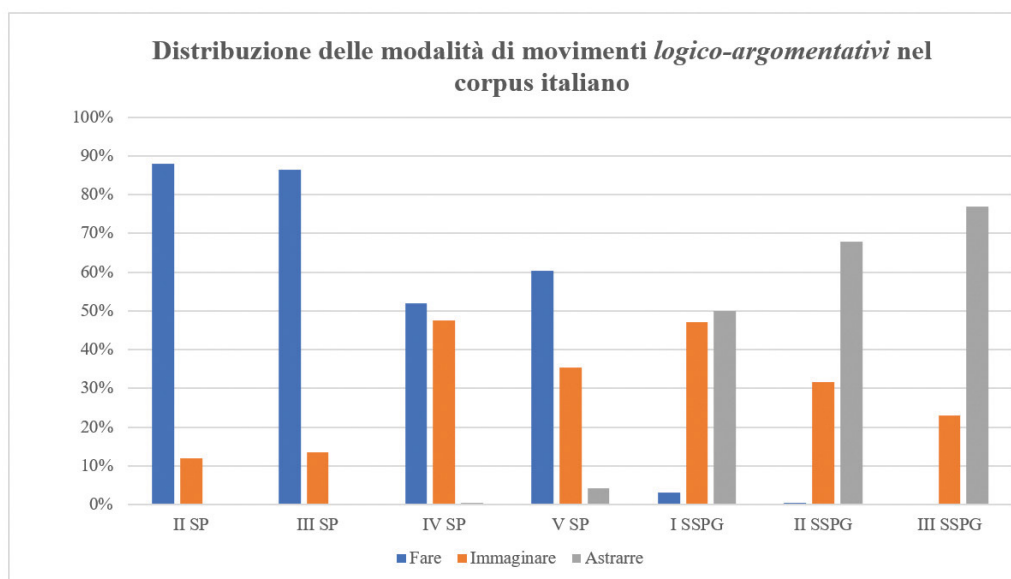


Fig. 4 – Distribuzione in forma di grafico a colonne delle tre modalità di movimenti *logico-argomentativi* nei libri di testo per i diversi anni.

In primo luogo, dal grafico emergono due tendenze globali interessanti: i movimenti con la modalità di far *fare* – come da prassi tipiche dei testi – decrescono drasticamente all'aumentare dell'anno di scolarità, passando dall'88,00% in II primaria allo 0% in III secondaria di primo grado. Al contrario, invece, i movimenti con la modalità di far *astrarre* crescono all'aumentare dell'anno di scolarità, passando dallo 0% al 76,92% nelle stesse classi. Questi due andamenti opposti non sono inattesi: nei primi anni di scolarità è comprensibile che la didattica prediliga l'esperienza concreta e l'azione pratica rispetto al ragionamento astratto, mentre con l'aumentare dell'età biologica e cognitiva di chi apprende che si tenda a presentare la disciplina nelle sue componenti più astratte, tipiche dei modi di ragionare e dei simbolismi propri della matematica. Per quanto riguarda l'evoluzione dei movimenti *logico-argomentativi* con la modalità di far *immaginare*, invece, si nota una certa costanza nel ricorso a questa strategia. Tutti questi risultati vanno letti tenendo in considerazione l'argomento di analisi scelto, il tema dei *poligoni*, che viene riproposto di classe in classe con ripassi e approfondimenti concettuali.

Da un'analisi più fine emerge anche come le evoluzioni delle modalità di movimenti *logico-argomentativi* presentino forti tratti di discontinuità in coincidenza dei cambi di adozione dei libri di testo e del cambio di ordine scolastico (passaggio dalla III alla IV primaria e dalla V primaria alla I secondaria di primo grado); discontinuità sulla quale è importante riflettere, perché difficilmente giustificata e supportata da un'effettiva evoluzione cognitiva e di maturità degli allievi nell'arco di un'estate. Per quanto riguarda la modalità *logico-argomentativa* che fa *fare*, si

nota un brusco calo delle percentuali tra la III e la IV primaria: dall'86,44% al 52,05%; crollo, ancora più marcato, nella transizione dalla V primaria alla I secondaria di primo grado: dal 60,43% al 3,01%. Considerando invece l'evoluzione della modalità *logico-argomentativa* che fa *immaginare*, si nota un deciso aumento di percentuale nel passaggio dalla III primaria (13,56%) alla IV (47,54%), come se anche in questo caso si presupponesse un rapido balzo in avanti nella capacità di staccarsi via via dal reale. Per quanto riguarda infine la modalità *logico-argomentativa* che fa *astrarre*, nella sua evoluzione anno per anno si nota una discontinuità marcata nella transizione dalla V primaria alla I secondaria di primo grado, in cui si passa dal 4,32% al 49,90%: è proprio riguardo a questo che la didattica e i suoi strumenti meriterebbero una riflessione critica, onde evitare che continuino per la loro strada, consolidata nel tempo, senza interrogarsi sui reali bisogni degli allievi.

C'è da chiedersi se simili stacchi tra le modalità *logico-argomentative* *far fare*, *far immaginare*, *far astrarre* (dalla III alla IV primaria e tra la V primaria e la I secondaria di primo grado), che risultano ormai sedimentate nelle prassi dei testi, siano davvero sostenibili per gli allievi di una certa fascia d'età e utili per una didattica che voglia costruire apprendimento e competenze; cambiamenti di modalità di ragionamento troppo bruschi potrebbero infatti concorrere all'allontanamento dalla disciplina e rendere via via più difficoltoso acquisirne i contenuti. Se si richiama la prospettiva piagetiana secondo cui il pensiero diviene pienamente formale, ossia consente di condurre ragionamenti senza la necessità di partire da un dato di esperienza, intorno ai 12 anni d'età (Lawson & Renner, 1975; Piaget, 1972), allora anche le scelte connesse alle modalità *logico-argomentative* meritano una riflessione in termini di gradualità e di evoluzione, in stretto dialogo con le percezioni e con le potenzialità degli allievi, soprattutto di quelli il cui pensiero rimane più a lungo ancorato alla concretezza.

L'evoluzione delle modalità argomentative nel corpus svizzero. Per quanto riguarda il contesto svizzero, sono 54 i movimenti *logico-argomentativi* presenti nel corpus svizzero, corrispondenti al 8,97%, rispetto a 604 movimenti testuali complessivi che corrispondono al 23,91%. Pur trattandosi di contesti editoriali e scolastici completamente differenti, per cui è opportuna una certa cautela nel trarre conclusioni, si nota che, globalmente, la presenza di questo tipo di movimento testuale è abbastanza inferiore nei libri in lingua italiana della Svizzera rispetto a quella presente nei libri dell'Italia.

Analizzando più in dettaglio quanto avviene nei due Cantoni, va considerato che in Canton Ticino il sub-corpus è costituito da 7 libri di testo di scuola secondaria di primo grado: 3 di I SSPG, 3 di II SSPG e 1 di III SSPG. La seguente tabella (**Tab. 3**) mostra le quantità dei tre tipi di movimenti *logico-argomentativi* presenti in questi testi, espressa in forma numerica e percentuale:

Modalità di movimenti <i>logico-argomentativi</i>	Quantità nel sub-corpus ticinese
Modalità di far <i>fare</i>	21 (40,38%)
Modalità di far <i>immaginare</i>	12 (23,08%)
Modalità di far <i>astrarre</i>	19 (36,54%)
Totale	52 (100%)

Tab. 3 – Distribuzione delle modalità di movimenti *logico-argomentativi* nel sub-corpus ticinese.

Come emerge dai dati, le modalità di movimenti *logico-argomentativi* nei libri del Canton Ticino sono distribuite diversamente rispetto a quelli italiani di scuola secondaria di primo grado (SSPG), avendo una prevalenza di modalità che fanno *fare* (21 movimenti, pari al 40,38%) rispetto alle altre due. Se poi si analizza l'evoluzione delle tre modalità lungo tutti gli anni di scolarità, dalla I alla III SSPG, emergono alcuni altri aspetti interessanti (**Tab. 4**):

Modalità di movimento <i>logico-argomentativo</i>	Quantità nel sub-corpus ticinese		
	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Modalità di far <i>fare</i>	12 (54,55%)	9 (56,25%)	0 (0%)
Modalità di far <i>immaginare</i>	8 (36,36%)	3 (18,75%)	1 (7,14%)
Modalità di far <i>astrarre</i>	2 (9,09%)	4 (25,00%)	13 (92,86%)
Totale	22 (100%)	16 (100%)	14 (100%)

Tab. 4 – Distribuzione per anno delle tre modalità di movimenti *logico-argomentativi* nel sub-corpus ticinese.

La modalità *logico-argomentativa* che fa *immaginare* sembra seguire una tendenza globale di decrescita graduale che si evidenzia sia nel passaggio dalla I SSPG alla II SSPG (dal 36,36% al 18,75%), sia dalla II SSPG alla III SSPG (dal 18,75% al 7,14%). Inoltre, si notano due bruschi cambiamenti nel passaggio dalla II alla III SSPG: scompare la modalità *logico-argomentativa* che fa *fare* (dal 56,25% allo 0%), mentre si impone la modalità *logico-argomentativa* che fa *astrarre* (dal 25,00% al 92,86%). In questo caso sembra che i libri ticinesi ricalchino la stessa mancanza di gradualità riscontrata nel caso dei libri italiani, ma questa volta spostata due anni in avanti rispetto a questi ultimi, rispettando dunque maggiormente i tempi di maturazione dell'età cognitiva degli allievi. Per il salto relativo ai movimenti *lo-*

gico-argomentativi che avviene dalla II alla III SSPG occorre ricordare che il tema viene affrontato a spirale nei diversi anni e in III SSPG viene affrontato come ripasso dei saperi già appresi negli anni precedenti; ne conseguono i bassi valori riportati in tabella.

Al di là dei dati quantitativi e di cambiamento negli anni, a livello qualitativo i movimenti *logico-argomentativi* dei libri prodotti nei due diversi contesti nazionali sono analoghi e non mostrano particolari differenze di realizzazione. Va però almeno citata, a titolo di curiosità per la sua originalità, la scelta dell'editore Casagrande (editore di 5 dei 7 libri considerati) di avvalersi nei suoi testi di un andamento dialogico a cui non è estranea la storia della manualistica in lingua italiana, soprattutto in ambito linguistico. Ne deriva che anche i (rarissimi) passaggi *logico-argomentativi*, talvolta, possono trovarsi inseriti in questa modalità trattatistica, con esiti come questo (Fig. 5, T2_6, p. 145):

A proposito di angoli, devi ricordare una caratteristica importante di tutti i triangoli:

la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180° (corrisponde cioè a un angolo piatto).

Gero: « Io ho verificato questa particolarità disegnando e ritagliando parecchi triangoli, ai quali strappavo poi gli angoli, che incollavo ordinatamente in modo che risultassero consecutivi .»

Aba: « Io, invece, ho misurato gli angoli di alcuni triangoli e ho verificato che la somma dava sempre 180° , pur tenendo conto di piccoli errori dovuti all'imprecisione delle misure con il goniometro. »

Fig. 5 – Esempio di movimento *logico-argomentativo* che invita a *immaginare* (I secondaria di primo grado).

Qui il movimento *logico-argomentativo*, che negli esempi precedenti era sempre presentato dal libro al lettore in forma statica, prende vita nelle parole dei due personaggi-guida del testo: la tesi enunciata – “la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180° (corrisponde cioè a un angolo piatto)” – è sostenuta dalle prove di disegno, ritaglio e misura resocontate in forma di discorso diretto dalle voci dei due; al lettore non resta che seguirle e simularle con la mente (non vi sono immagini annesse).

Per quanto riguarda il Canton Grigioni, infine, occorre ricordare che la scuola primaria dura sei anni, e non cinque come avviene in Canton Ticino e in Italia, mentre la secondaria di primo grado dura tre anni. Nella fase di raccolta del corpus, inoltre, abbiamo potuto trovare un'unica collana di testi di matematica in lingua ita-

liana, comprendente un libro per ogni anno di scolarità, e promossa direttamente dall'Ufficio per la scuola popolare e lo sport. In totale sono stati dunque raccolti 5 libri di scuola primaria (dalla II SP alla VI SP) e un libro di scuola secondaria di secondo grado (I SSPG), mentre nelle successive classi di SSPG non è presente questo argomento. Nei libri di testo della primaria non sono stati trovati movimenti *logico-argomentativi*, mentre nel libro di I SSPG si è riscontrata unicamente la presenza di due movimenti *logico-argomentativi* con la modalità di *far fare*. Si notano dunque scelte diverse di tipi di movimenti testuali a seconda del contesto culturale.

6.1.2 Una lettura dei movimenti testuali logico-argomentativi: inventio, dispositio ed elocutio

In questo paragrafo intendiamo mostrare come l'utilizzo di alcune categorie retoriche, quali l'*inventio*, la *dispositio* e l'*elocutio*, per l'analisi di movimenti testuali di tipo *logico-argomentativo* possa mettere in luce aspetti significativi per la didattica della matematica, che di solito non riescono a emergere attraverso altri tipi di analisi condotte abitualmente in questo campo di ricerca. La prospettiva retorica attuale che considereremo si inserisce all'interno dell'ampio e sfaccettato panorama che ruota attorno alle cosiddette *teorie dell'argomentazione*, le quali, prendendo le mosse dai lavori di Perelman & Tytheca (2013), hanno via via consolidato una prospettiva sinergica tra il mondo dialettico, storicamente legato ai meccanismi del ragionamento, e il mondo retorico, che sviluppa gli strumenti più adeguati per ottenere maggior efficacia persuasiva.

Nell'ottica delle moderne teorie, i due mondi vanno a intrecciarsi, fornendo l'uno il sostegno all'altro, sottolineando l'idea che «la persuasività sia un reale contributo alla ragionevolezza, sia necessaria ad una comunicazione pienamente ragionevole», e in cui chi argomenta «non ritiene solo che sia possibile essere ragionevoli e persuasivi, ma anche che non sia possibile essere pienamente ragionevoli senza un impegno persuasivo, un impegno ad aver cura delle circostanze che favoriscono nel mio interlocutore l'uso della ragione» (Rocci, 2017, pp. 102-103). La prospettiva diventa interessante dal punto di vista teorico, perché consente di esplorare la comunicazione considerando diverse sue sfaccettature che consentono di analizzarla e comprenderla.

Visto il genere dei testi del corpus DFA-Italmatica, nei quali convivono la dimensione logica della matematica e quella comunicativa del libro a uso didattico, è sembrato utile tentare di utilizzare questo approccio. Il tentativo ha dato interessanti frutti, di cui qui presenteremo una sintesi, rimandando al più ampio Canducci, Rocci e Sbaragli (in stampa) per un approfondimento.

6.1.2.1 Inventio, dispositio ed elocutio

La tradizione retorica latina, che molto deve agli studi retorici greci precedenti, suddivide l'arte dei discorsi oratori in cinque parti: *inventio*, *dispositio*, *elocutio*, *memoria* e *actio*⁶. Nel momento in cui il discorso è presentato in forma scritta, e non dell'oralità, le sezioni del discorso retorico si riducono alle prime tre, perché la *memoria* e l'*actio* «riguardano l'esecuzione orale di discorsi scritti per essere recitati (memorizzati o anche letti)» (Mortara Garavelli, 2020, p. 84); esse vengono dunque trascurate nelle trattazioni dedicate alla composizione scritta. Per questo motivo, ci occuperemo in questo paragrafo di delineare alcune delle caratteristiche dell'*inventio*, della *dispositio* e della *elocutio*, preoccupandoci unicamente di fornire le coordinate più utili all'analisi che sarà proposta al **paragrafo 6.1.2.3**.

Inventio. L'*inventio* (dal verbo *invenire*, che ha come primo significato quello di *trovare*) riguarda la ricerca dei contenuti e la progettazione del discorso persuasivo: si occupa cioè di reperire e scegliere tipi di prove e argomenti che rendano convincente la tesi cui si vuole giungere. Da un punto di vista tanto classico quanto moderno, in questa sezione si affrontano i tipi di ragionamento e la tematica dei *tòpoi* (*loci* in latino, *luoghi* in italiano). Nella sistemazione aristotelica dell'*inventio*, ci si sofferma in particolare sulle strutture tipiche dell'argomentazione quali sono l'*esempio* e l'*entimema*.

L'*esempio* «rappresenta l'analogo retorico dell'induzione [...] poiché consiste nel dimostrare, sulla base di molti casi simili, che le cose stanno in un certo modo» (Piazza, 2015, p. 115). Materia dell'*inventio* riferita all'*esempio* è, com'è naturale, anche la scelta di quali e quanti esempi proporre all'uditorio: infatti da un lato si tratterà di scegliere la tipologia di esempio più opportuna in funzione dell'uditorio cui ci si riferisce, dall'altro di decidere quanti esempi proporre a sostegno di una tesi, non dimenticando che dal punto di vista della retorica classica «il giusto mezzo tra i due opposti eccessi, che sono il dire troppo o troppo poco, si otterrà con l'espone "quanto bisogna" e "quanto basta": il necessario e sufficiente» (Mortara Garavelli, 2020, p. 95), e questo vale in generale per tutte le parti del discorso persuasivo. L'*entimema* è l'analogo retorico del sillogismo, ma a differenza di questo si basa su premesse verosimili, non necessariamente vere, con le quali si giunge a conclusioni probabili e confutabili: «esso è quando, date certe premesse, risulta per mezzo di esse qualcosa di altro e di ulteriore per il fatto che esse sono tali o

6. Riferimento fondamentale per questa suddivisione è la *Rhetorica ad Herennium* (Cornificio, 1993): il più antico trattato di retorica in latino a noi pervenuto, scritto fra l'86 e l'82 a.C.; è la rielaborazione di una fonte greca. Attribuito a Cicerone fino al XVI secolo, è tuttora di paternità incerta (forse di un certo Cornificio); breve, chiaro e molto fruibile, ha avuto larghissima fortuna nel Medioevo. Nulla si sa neppure dell'Errenio destinatario del trattato.

universalmente o per lo più» (Ret., I, 2, 1356b). Così come i sillogismi, gli entimemi sono strutturati secondo la terna *premessa maggiore*, *premessa minore* e *tesi*. Ora, generalmente, quando si vuole convincere circa la validità di un'affermazione, la tesi è conosciuta da chi argomenta, mentre le premesse costituiscono materia di elaborazione, e la loro ricerca rappresenta il cuore delle fatiche di chi argomenta. Per facilitare questo sforzo, tutti gli studi retorici da Aristotele in poi hanno cercato di raggruppare, suddividendolo in categorie chiamate (in italiano) *luoghi*, il materiale utile per poter trovare più facilmente argomenti in caso di bisogno. I luoghi sono cioè «le fonti a partire [...] dalle quali l'oratore costruisce le sue argomentazioni. Si tratta di schemi argomentativi, e non di argomenti già compiutamente formulati, che vengono applicati ai casi specifici e ai quali possono venire ricondotti i singoli entimemi» (Piazza, 2015, p. 65). *Luoghi* classici sono quelli che rientrano nella categoria "del genere e della specie", di cui un esempio è la seguente affermazione di carattere induttivo: «se diverse specie di un genere G posseggono una data proprietà P, allora probabilmente P è una proprietà del genere G»; da questo luogo si possono ricavare numerosi entimemi; esso è utilizzato, come vedremo, nell'argomentazione matematica.

Dispositio. La *dispositio* riguarda l'organizzazione del discorso persuasivo, e si occupa dei vari modi in cui disporre gli argomenti per fare sì che il discorso risulti efficace e, appunto, persuasivo. Tipicamente riguarda tre livelli: la partizione del discorso e di singole sezioni; l'ordinamento dei contenuti all'interno di ciascuna parte; l'ordine delle parole nella formulazione delle idee.

Il primo livello vede classicamente un discorso persuasivo diviso in quattro parti: *esordio*, *narrazione*, *argomentazione* ed *epilogo*. L'*esordio* è l'inizio, il preambolo del discorso, nel quale può anche venire esposta la *quaestio* (cioè l'argomento specifico da trattare). La *narrazione* è l'esposizione dei fatti, e tiene conto delle dimensioni spazio-temporali degli avvenimenti. L'*argomentazione* è il cuore del discorso persuasivo ed è il momento in cui si adducono le prove. L'*epilogo* è infine la conclusione del discorso. Non è necessario che all'interno di un discorso oratorio siano presenti tutte e quattro le parti (Ret., III 13, 1414a), come vedremo anche nella nostra analisi.

Per quanto riguarda il secondo livello, Piazza (2015, pp. 161-162) fa notare che per Aristotele «l'ordine con cui si espongono gli entimemi ha [...] un peso nella persuasività complessiva del discorso e lo stesso vale, precisa Aristotele, per la quantità. Un eccesso di sillogismi non solo indebolirà l'impatto emotivo ma andrà anche a scapito sia della chiarezza sia della stessa credibilità dell'oratore». Al di fuori di ciò che riguarda la disposizione degli entimemi in un discorso persuasivo, Aristotele tratta gli *esempi*, affermando che occorra «qualora se ne posseggano, servirsi di essi come testimonianze, usandoli come epilogo per gli entimemi: infatti se sono anteposti danno l'impressione di un'induzione, e per i discorsi retorici l'induzione

non è appropriata se non in pochi casi, se sono detti a conclusione invece fungono da testimonianze, e la testimonianza è in ogni caso persuasiva» (Ret., II, 20, 1394a). La questione diventa interessante, se trasposta nel caso dei libri di testo di matematica: l'*esempio* è spesso posto prima dell'*epilogo*, utilizzandolo dunque in senso induttivo, nel momento in cui si vuole condurre il lettore-allievo a riconoscere regolarità e proprietà geometriche, mentre viene posto a conclusione del discorso quando si vuole rafforzare nel lettore l'acquisizione di una conoscenza da poco esposta.

Quanto all'ultimo livello, infine, quello relativo cioè alla disposizione delle parole nella formulazione delle idee, esso presenta forti intrecci con la fase dell'*elocutio*, e può essere interessante ricordare che esistono forme "non marcate" e forme "marcate" di disposizione delle parole. In breve, come già anticipato, una forma "non marcata" rappresenta lo standard linguistico, l'uso più comune e neutro, privo di enfasi, della disposizione delle parole, che non presenta elementi che catturano particolarmente l'attenzione di chi legge o ascolta, risultando per certi versi neutrale e appropriato alla maggior parte dei contesti. Una forma "marcata" è, al contrario, caratterizzata da una scelta non standard, che presuppone un'intenzione di enfaticizzazione da parte di chi la usa, e che risulta meno scontata e non neutrale. Ad esempio, in Rocci (1996) si fa notare che nel sintagma nominale italiano gli aggettivi possono tanto precedere quanto seguire il nome, ma l'ordine "non marcato" prevede tipicamente che l'aggettivo venga dopo il nome (la frase "Il cane grosso" è generalmente più neutrale e "non marcata" di "Il grosso cane")⁷.

Elocutio. L'*elocutio* riguarda il modo, lo stile con il quale viene presentato il discorso argomentativo: si occupa di dare forma linguistica alle idee in modo che risultino quanto più efficaci possibile.

Tradizionalmente, il materiale linguistico oggetto di elaborazione nell'*elocutio* dovrebbe essere scelto esercitando le quattro qualità (*virtus* in latino) dello stile oratorio: l'*aptum*, ovvero l'appropriatezza, che corrisponde al requisito di un discorso di essere conforme, conveniente, cioè, alle specifiche circostanze e agli scopi nel quale viene prodotto; la *puritas*, ovvero la correttezza lessicale e grammaticale, che si fonda sul rispetto di un'ideale di integrità della lingua; la *perspicuitas*, ovvero la chiarezza, la nitidezza del discorso, necessaria affinché esso sia comprensibile; infine l'*ornatus*, ovvero l'eleganza, la bellezza derivante dall'uso opportunamente

7. Altri esempi lampanti di marcatezza sintattica sono le dislocazioni (in "Il caffè lo prendo ora" si enfatizza l'oggetto portandolo in prima posizione rispetto al normale ordine S-V-O di "Prendo ora il caffè"). Nei testi scientifici le forme "marcate" a scopo enfatico tendono a essere poche via via che il discorso si fa più rigoroso e formale, e anche nei libri per la scuola sono rare e, se presenti, lo sono nelle parti più colloquiali.

regolato di mezzi e ornamenti linguistici rappresentati dalle figure retoriche. Per il nostro scopo è utile tratteggiare alcune riflessioni riferite alla *perspicuitas*, ovvero alla chiarezza espositiva, ricordando anche che l'essere chiaro e comprensibile è una qualità soggetta alla valutazione del particolare uditorio cui il discorso si riferisce (Mortara Garavelli, 2020, p. 192).

Il massimo difetto di chiarezza si ha quando il discorso risulta totalmente oscuro e incomprensibile, ad esempio perché composto in una lingua ignota all'uditorio. Se ci mettiamo nell'ottica dell'apprendimento della matematica, apprendimento che è costituito anche dall'imparare termini ed espressioni del suo linguaggio specialistico (Lavinio, 2004), può ad esempio accadere, soprattutto nei livelli iniziali di scolarità, che l'alunno senta un discorso o un testo come oscuro a causa della non conoscenza di alcune delle parole che vengono usate. Al di là di questo estremo, le oscurità parziali del discorso possono riguardare la presenza di passaggi impliciti, oppure le due categorie dell'ambiguità semantica e dell'ambiguità sintattica. La prima riguarda la presenza di termini o di costrutti grammaticali che possono essere interpretati in modi diversi, qual è il caso delle parole polisemiche come *angolo*, usato in matematica per indicare un ente geometrico, nella lingua comune per indicare, ad esempio, il punto di incontro di due o più spigoli di una parete (si veda a questo proposito Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020). La seconda riguarda le frasi passibili di più interpretazioni, e nasce dalla disposizione delle parole nella frase, che in italiano può essere estremamente varia (trattandosi di una lingua mobile); ad esempio, la frase "I poligoni regolari hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali" presenta un'ambiguità sintattica, perché la parola "uguali" posta alla fine potrebbe essere intesa nel senso di "lati e angoli uguali fra loro", cosa che tra l'altro potrebbe generare confusione nella mente di chi legge, considerando che non ha senso mettere in relazione di uguaglianza due entità diverse quali sono i lati e gli angoli di un poligono.

Quanto all'eccesso opposto, ovvero alla ricerca esagerata di chiarezza, essa è variabile e sostanzialmente dipende dai tipi di discorso: un esempio di eccessiva chiarezza, che può essere visto negativamente in termini retorici, è quando il discorso risulta pedante a causa di precisazioni superflue, perché l'uditorio è già esperto del tema di cui si sta trattando.

6.1.2.2 Breve digressione: categorie antiche in chiave multimodale

La prospettiva di analizzare le argomentazioni prodotte in ambito multimodale è relativamente recente (si veda ad esempio Kjeldsen, 2015; Pollaroli & Rocci, 2015; Rocci, 2017; Rocci & Pollaroli, 2018) e sfrutta strumenti provenienti tanto dalla tradizione degli studi linguistici e di argomentazione, quanto dalle attuali scienze della comunicazione relative all'uso delle immagini e degli espedienti grafici.

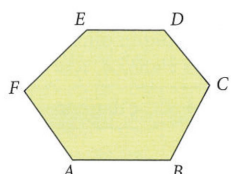
Per i nostri scopi è importante riconoscere che all'interno di discorsi argomentativi l'uso di elementi e strategie semiotiche multimodali – quali sono ad esempio le figure geometriche, l'uso di frecce o del colore, l'organizzazione del layout di una pagina (già viste nel **par. 5.5.2**) – può assolvere a diverse funzioni che rientrano nelle fasi di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio*, riconosciute sin dalla retorica antica. Ad esempio, la scelta di rappresentare uno specifico poligono invece che un altro, oppure di rappresentarne più di uno, può essere interpretata in termini di scelta degli argomenti che sostengono in modo più o meno efficace la tesi conclusiva all'interno dell'argomentazione, rientrando dunque nell'*inventio* del discorso; la scelta di disporre le figure e il testo all'interno della pagina in un modo piuttosto che in un altro può dar luogo a risultati comunicativi più o meno efficaci, rientrando dunque nella *dispositio* del discorso; infine, la scelta stessa di rappresentare una data procedura o fatto geometrico secondo due modi semiotici diversi, quello linguistico e quello figurale, può essere intesa relativamente al modo e alla forma con i quali presentare il discorso per far sì che esso risulti più comprensibile per l'uditorio, rientrando dunque nel tipo di scelte interne all'*elocutio*.

6.1.2.3 L'analisi di un esempio

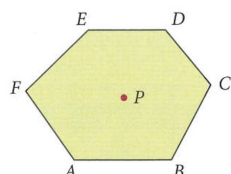
Il seguente esempio, un movimento testuale di tipo *logico-argomentativo* con la modalità di far *immaginare*, è tratto da un libro di matematica del corpus italiano rivolto a studenti di I secondaria di primo grado: in esso si accompagna il lettore a riconoscere che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono di n lati è pari a $(n-2) \cdot 180^\circ$ (**Fig. 6, 3_6**, p. 179). In questo paragrafo mostreremo come sia possibile interpretarlo con le chiavi di lettura dell'*inventio*, della *dispositio* e dell'*elocutio*.

● Angoli interni

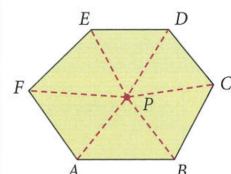
Disegna un poligono, per esempio un esagono;



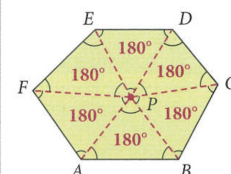
segna un punto all'interno del poligono;



congiungi il punto con i vertici del poligono: ottieni 6 triangoli.



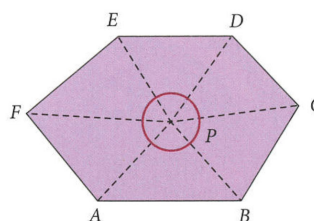
Nel triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto.



Somma i sei angoli piatti, poi dalla somma sottrai l'angolo giro (due angoli piatti) che ha come vertice il punto interno.

$$180^\circ \cdot 6 - 180^\circ \cdot 2 = 180^\circ \cdot 4$$

Ottieni 4 angoli piatti, che sono la *somma degli angoli interni* dell'esagono.



La **somma degli angoli interni** di un poligono è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due.



ANIMAZIONE IN DIGITALE
Angoli dei poligoni

Fig. 6 – Esempio tratto da un libro di I secondaria di primo grado da leggere secondo l'*inventio*, la *dispositio* e l'*elocutio*.

Inventio. Un primo elemento di *inventio* riscontrato in questa porzione di testo riguarda il tipo di costruzione geometrica scelta come base della strategia argomentativa, che si fonda sulla triangolazione del poligono effettuata tracciando i segmenti che hanno come estremi un punto interno al poligono e i vertici del poligono⁸. Attraverso questa costruzione, la strategia argomentativa consiste nel mostrare che un poligono di n lati viene scomposto in n triangoli; sapendo poi che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è pari a 180° , si ha che la somma delle ampiezze degli angoli interni dei triangoli così ottenuti sarà data dalla moltiplicazione tra 180° e n ; a tale prodotto va poi sottratta l'ampiezza dell'angolo giro con origine nel punto interno, arrivando così alla tesi.

8. Nelle 23 porzioni di libri del corpus DFA-Italmatica che trattano questo tema sono state riscontrate globalmente tre diverse costruzioni geometriche di *inventio* scelte come base delle argomentazioni: la più diffusa (14 libri, il 60,87%) utilizza una triangolazione del poligono effettuata tracciando tutte le diagonali che hanno come estremo un unico vertice fissato; la seconda (4 libri, il 17,39%), utilizza invece la triangolazione mostrata in questo esempio; la terza (4 libri, il 17,39%) si basa invece su una costruzione incentrata sulla constatazione che gli angoli interni ed esterni sono supplementari; in un caso (il 4,35%) si sceglie infine di mostrare sia la prima che la seconda strategia. Per un approfondimento si veda Canducci, Rocci e Sbaragli (in stampa).

A livello di tipo di ragionamento proposto, l'estratto rientra nel tipo di *inventio* dell'*esempio* individuata da Aristotele: per dare fondamento al fatto che, triangolando in questo modo, un poligono di n lati viene suddiviso in n triangoli, e che da questo si può inferire la tesi considerando le ampiezze degli angoli interni dei triangoli e dell'angolo giro con origine nel punto interno, viene fornito un esempio in cui ciò accade. Sottolineiamo che si tratta proprio di *un solo* esempio, cosa che non vale in generale, dato che un'argomentazione potrebbe contenerne due, tre o più; aspetto che si presenta in altre porzioni di testo che trattano lo stesso tema. La scelta di fornire un solo esempio, unita alla mancanza di passi linguistici che potrebbero esplicitare le relazioni tra il caso specifico dell'esagono e il caso generico del poligono di n lati, sembra rendere nascosta la generalizzazione dal caso particolare a un poligono generico; generalizzazione che sembra essere totalmente a carico del lettore. Anche la scelta di quali esempi fornire rientra nella materia dell'*inventio*: in questo caso si è scelto di riferirsi a un esagono generico.

Sempre a livello di *inventio*, notiamo che sono presenti almeno quattro *luoghi* principali. Un primo *luogo*, impiegato qui in senso induttivo, rientra nella categoria 'del genere e della specie', già citato nel **paragrafo 6.1.2.1**: "se diverse specie di un genere G posseggono una data proprietà P , allora probabilmente P è una proprietà del genere G "; questo luogo viene utilizzato per generalizzare a un poligono generico tre proprietà: la proprietà relativa al tipo di triangolazione, quella relativa al numero di triangoli che si ottengono con tale triangolazione e quella relativa al fatto che il numero di triangoli così ottenuti sia pari al numero dei lati del poligono.

Un secondo *luogo* rientra all'interno della categoria 'della specie e dell'individuo', ed è invece utilizzato in modo deduttivo: "Se per la specie S vale una proprietà P , allora per ogni individuo della specie S vale la proprietà P ", ed è utilizzato quando si applica il teorema relativo alla somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo ai triangoli ottenuti dalla costruzione.

Un terzo *luogo* rientra nella categoria 'parte e tutto' ed è usato per calcolare la somma delle ampiezze degli angoli interni dei triangoli ottenuti dalla triangolazione come n volte la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo; sempre in questa categoria può rientrare anche un quarto *luogo*: "se un tutto T è composto dalle parti A e B , allora una delle due parti corrisponde al tutto meno l'altra parte", utilizzato per individuare la somma delle ampiezze degli angoli interni del poligono come differenza fra la somma delle ampiezze degli angoli di tutti i triangoli ottenuti dalla triangolazione e l'ampiezza dell'angolo giro.

Ci sembra che la quantità di elementi legati all'*inventio* qui richiamati renda conto di una complessità non evidente a una prima lettura: lo sguardo proposto si aggiunge a quello abituale in didattica della matematica, arricchendolo.

Dispositio ed *elocutio*. Guardiamo ora a come è composto l'estratto a livello di *dispositio*, inserendo all'interno del commento anche riflessioni riguardo allo stile e alla forma linguistica con la quale essa viene realizzata, cioè all'*elocutio*. In prima battuta facciamo notare che, dal punto di vista matematico, la tesi è posta come *epilogo* in fondo alla pagina⁹ e che, dal punto di vista dell'organizzazione del discorso trattato nel paragrafo, l'estratto può essere suddiviso nelle due parti: *argomentazione* ed *epilogo*. Notiamo che non è presente né un *esordio*¹⁰ né la parte della *narrazione*, che tipicamente si riferisce a discorsi in cui è necessario esporre eventi e avvenimenti riguardanti personaggi ed episodi significativi ai fini dello sviluppo dell'argomentazione.

L'*argomentazione* è la parte più corposa dell'estratto, e può essere suddivisa in cinque blocchi linguistico-figurali. Nei primi quattro blocchi, disposti uno accanto all'altro da sinistra a destra, viene descritto il procedimento relativo alla costruzione geometrica da realizzare, riferito a un esagono preso come *esempio*. Significativo è notare il ricorso a un linguaggio che, a differenza di quanto può accadere in altri casi, tenta di coinvolgere in prima persona il lettore attraverso l'uso di verbi iussivi alla seconda persona singolare (*Disegna, segna, congiungi, ottieni*). Questo tipo di strategia comunicativa può variare molto a seconda dell'impostazione adottata dal testo (come mostra il **par. 6.1.1**), e in generale prevedere coinvolgimenti molto diversi del lettore, ad esempio stimolandolo a operare direttamente congetture sulla base di attività più o meno laboratoriali. In ciascuno di questi quattro blocchi viene associata la parte linguistica alla rappresentazione figurale riferita a un esagono.

Nel quinto blocco a centro pagina vengono invece presentati i passi aritmetici del ragionamento che conducono alla giustificazione della tesi, continuando a utilizzare verbi alla seconda persona singolare (*Somma, sottrai, Ottieni*). In questo blocco si fa uso anche per la prima volta di un simbolismo aritmetico, oltre che della proprietà distributiva nell'espressione $180^\circ \cdot 6 - 180^\circ \cdot 2 = 180^\circ \cdot 4$. Il quinto blocco

9. Delle 23 porzioni di testo individuate nel corpus, 19 (l'82,61%) scelgono di proporre la tesi come *epilogo* del discorso; 1 caso (il 4,35%) presenta la tesi all'interno dell'*argomentazione*, facendola seguire da un esempio illustrativo della strategia geometrica adottata; 1 (il 4,35%) pone la tesi come *esordio* del discorso; infine, 2 casi (l'8,69%) non esplicitano la tesi: un libro stimola lo studente a ipotizzarla in modo autonomo, l'altro invece si limita a raggiungere la conclusione riferita al caso specifico di un pentagono. Questo è indice di una preferenza generale dei libri di testo per la scuola, a cui potrebbe corrispondere un'altra a livello di pratiche didattiche, di terminare il discorso con una conclusione che è anche la tesi cui si voleva giungere.

10. Può essere interessante richiamare che delle 23 porzioni di testo che trattano il tema, 9 (il 39,13%) scelgono di proporre un *esordio* per introdurre il tema, mentre 14 (il 60,87%) iniziano direttamente dalla parte *argomentativa*. Si nota dunque una certa tendenza a entrare direttamente dentro al tema (in *medias res*, come direbbe uno studioso di retorica), senza preamboli introduttivi, il che potrebbe disorientare il lettore bisognoso di capire il senso di quello che sta per affrontare.

si conclude con la tesi enunciata nel caso dell'esagono, scegliendo tra l'altro di enfatizzare una parte del testo attraverso l'uso del corsivo: "Ottieni 4 angoli piatti, che sono la *somma degli angoli interni* dell'esagono".

A livello di *elocutio* multimodale, si nota globalmente la scelta di rappresentare l'esagono cinque volte, in corrispondenza della parte linguistica di ciascuno dei cinque blocchi. Osserviamo in prima battuta che il quinto esagono è in realtà diverso dai primi quattro, perché rispetto a questi è ingrandito. Inoltre, le cinque figure presentano alcune stranezze a livello di colori: il bordo dell'esagono è sempre colorato di nero; la parte interna dell'esagono è colorata di verde nelle prime quattro figure, e in viola nell'ultima; il punto P è colorato in rosso nelle prime quattro figure, e non è segnalato invece nella quinta; i segmenti della triangolazione sono anch'essi colorati di rosso nelle prime quattro figure, ma in nero nell'ultima, e si è scelto di tratteggiarli invece che rappresentarli, ad esempio, attraverso una linea continua; lo stesso colore rosso è utilizzato anche nelle sei scritte "180°" disposte all'interno di ciascuno dei triangoli della triangolazione; si utilizza nuovamente il nero per indicare (attraverso un archetto problematico dal punto di vista didattico) ciascuno degli angoli interni dei singoli triangoli della triangolazione; infine il rosso è nuovamente utilizzato per rappresentare, nella quinta figura, l'angolo giro che ha come origine il punto interno dell'esagono. Osserviamo in generale che queste scelte non appaiono omogenee, e che comunque potrebbero indurre il lettore a operare inferenze basate sull'idea di *similarità di colore* (par. 5.5.2): se due elementi della pagina sono rappresentati con lo stesso colore, si è portati a pensare che tra loro vi sia una qualche relazione di somiglianza; oppure, se, per uno stesso elemento, si utilizza prima un colore e poi un altro, vuol dire che è presente una differenza di cui dovrei accorgermi. Questi elementi di disomogeneità e di "confusione multimodale" sembrano poco significativi, ma in realtà possono influire nel processo di decodifica da parte del lettore-allievo, e nel suo affaticamento cognitivo già fortemente stimolato.

Notiamo anche che il punto rappresentato all'interno dell'esagono, cruciale per la triangolazione proposta, risulta essere in una posizione centrale della figura, cosa che non solo non sarebbe necessaria ai fini della validità dell'argomento, ma rischia di portare con sé interpretazioni non desiderate, perché un lettore potrebbe pensare che la triangolazione sia valida solo quando il punto interno al poligono è scelto in una posizione privilegiata.

L'*epilogo* è presentato nell'ultimo blocco testuale: si propone la conclusione del discorso, nella quale viene esposta la tesi cui si voleva giungere. Notiamo in primo luogo che vi è un brusco passaggio dal caso specifico dell'esagono considerato al caso di un poligono generico. Come abbiamo già anticipato, non solo questo passaggio non è preparato in alcun modo, ma il linguaggio utilizzato nell'*epilogo* perde

completamente il carattere di coinvolgimento utilizzato sino a questo momento.

Nell'estratto si sceglie poi di rappresentare la tesi attraverso il solo registro linguistico, evitando di associare a questo una espressione simbolica. Questa scelta è da un lato decisa e chiara; dall'altro, se si considera l'importanza per l'apprendimento della matematica di associare agli stessi contenuti rappresentazioni afferenti a registri semiotici diversi (par. 2.4), può essere vista come un'occasione persa di lavoro sulla *conversione* semiotica¹¹. Osserviamo poi che questa conclusione viene inserita all'interno di un box colorato in giallo, e che l'espressione "somma degli angoli interni" è in grassetto e colorata di rosso; queste scelte rientrano nella categoria di *elocutio*, perché hanno l'effetto di richiamare l'attenzione visiva del lettore attraverso delle enfasi di tipo semiotico multimodale, date ad esempio dall'uso di colori diversi da quelli utilizzati come sfondo della pagina e come testo.

Infine, non si può trascurare il fatto che, a livello di *elocutio*, l'estratto presenti elementi di oscurità parziale dati dalla scelta di mantenere impliciti diversi passaggi induttivi: la generalizzazione al poligono generico dell'uguaglianza: "numero di triangoli = numero dei lati"; la generalizzazione al poligono generico della costruzione adottata; la generalizzazione al poligono generico della relazione fra numero dei lati e numero di angoli piatti corrispondenti alla somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono generico. Queste scelte di *elocutio* appaiono problematiche non solo ai fini di una chiarezza espositiva ma anche ai fini di un accompagnamento del lettore alla comprensione dell'argomentazione proposta. D'altra parte, se è vero che in un'argomentazione è opportuno dire né troppo né troppo poco, ci troviamo davanti a un dilemma tipico della *perspicuitas* retorica: quanto esplicitare, quanto dire, perché il discorso risulti chiaro e allo stesso tempo non pedante o eccessivamente complesso per l'uditorio?

6.1.3 Riflessioni conclusive in prospettiva didattica

Se si considera che quella ad argomentare è sia un'abitudine mentale trasversale, sia un'azione concreta con specificità a seconda delle discipline, dei contesti, degli scopi ecc., allora una visione il più possibile globale delle occasioni di esposizione all'argomentazione (in senso lato) e di esercizio della stessa a scuola è un passo importante per rendersi conto delle debolezze, dei punti di forza e delle strategie più proficue ed efficaci. In questa visione, anche quel particolare strumento che

¹¹ In molte delle porzioni di testo del corpus che affrontano il tema della somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono si sceglie invece di dare una rappresentazione simbolica della tesi, eventualmente associata a quella linguistica. Per un'analisi di questi casi, si veda Canducci, Rocci e Sbaragli (in stampa).

sono i libri di testo di matematica offre uno spiraglio di indagine molto promettente, se si considera che nel campo della didattica della matematica la costruzione di competenze argomentative è essenziale, e deve essere sostenuta da competenze linguistiche generali e specialistiche.

Ma quali strumenti e occasioni diamo agli allievi per costruire tali competenze? I libri sono d'aiuto oppure continuano a parlare la loro lingua senza chiedersi se i modi che propongono sollecitino e attivino davvero i lettori? Le diverse modalità e la loro evoluzione al procedere della scolarità sono realmente adeguate allo sviluppo cognitivo dei bambini e dei ragazzi e alle loro esigenze? E poi ancora: le argomentazioni proposte dai libri di testo sono efficaci dal punto di vista retorico-comunicativo? La dimensione logica è ben integrata con quella persuasiva?

Alla luce di simili interrogativi, l'analisi qui presentata non vuole solo essere una ricognizione teorico-descrittiva, ma si propone di offrire a insegnanti e a ricercatori alcuni stimoli da cui partire per sperimentare in classe, acquisendo la curiosità e il piacere di entrare nella proposta testuale con gli allievi senza subirla passivamente, ma osservandola, discutendola (anche, ad esempio, confrontando come testi diversi propongono uno stesso contenuto), smontandola (soffermandosi sulle varie sotto-parti), riformulandola (secondo vari stili, per destinatari diversi, per renderla più comprensibile... sempre salvaguardandone la correttezza) o anche semplicemente esprimendosi su di essa (esplicitando, ad esempio, i passaggi impliciti, o avvertiti come non chiari), per cercare di capire quali sono le loro reali necessità e difficoltà; tutto ciò in vista di un apprendimento che non sia banale ripetizione, ma vera interiorizzazione. Questi stimoli nascono da una duplice analisi dei movimenti *logico-argomentativi* proposti all'interno dei libri di testo. La prima si è focalizzata sull'individuazione delle caratteristiche comunicative tipiche presenti all'interno di un libro di testo, e che fanno riferimento a tre diverse modalità con le quali il testo argomenta o vuol far argomentare il lettore-allievo. La seconda invece ha messo in evidenza la profondità che un approccio basato sull'utilizzo delle categorie di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio* consente di esplicitare nel caso delle argomentazioni di un libro di testo di matematica. Ci preme far notare che questa profondità si accompagna anche a una grande varietà di scelte possibili, come emerge chiaramente in Canducci, Rocci e Sbaragli (in stampa), in cui vengono messe a confronto diverse strategie argomentative analizzate tramite queste lenti.

6.2 Il caso dell'enunciato definizione

Quella legata al saper interpretare, comprendere e formulare *definizioni* è tra le competenze matematiche auspiccate durante la scuola dell'obbligo. Come abbiamo rilevato nel **paragrafo 5.3.1**, nei libri di testo dei vari livelli scolastici, i diversi oggetti della matematica sono presentati tramite definizioni espresse nel registro

linguistico, accompagnate in alcuni casi da rappresentazioni simboliche, grafiche o figurali, a seconda dell'età degli allievi, dell'ambito matematico coinvolto e dello stile del libro (Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020; Demartini, Sbaragli & Ferrari, 2020; Sbaragli, 2020). Ma che cosa si intende con *definizione* in matematica? In prospettiva interdisciplinare e didattica è estremamente interessante rispondere a questa domanda e capire in quale rapporto sta la *definizione* matematica con la *definizione* nel senso e nell'uso comune, perché si tratta di due operazioni cognitive e comunicative solo in parte analoghe. Pertanto, è importante anche per gli allievi iniziare presto a individuare le differenze tra il definire (per esempio del dizionario) e il definire proprio della disciplina matematica.

Vediamo dunque di approfondire questa distinzione nei prossimi paragrafi, focalizzando l'attenzione su alcuni aspetti di descrizione delle *definizioni* offerte dai libri di testo per la scuola e su alcune difficoltà degli allievi; le due questioni parrebbero essere più legate di quanto si possa a prima vista pensare: infatti, il modello definitorio offerto dai libri di testo spesso non rispecchia le caratteristiche che la *definizione* matematica dovrebbe (iniziare ad) assumere, gradualmente, in contesto scolastico, onde evitare che gli allievi si costruiscano un modello non del tutto pertinente alla disciplina (come vedremo accadere), ma, piuttosto, vicino al senso comune o ad altre modalità ibride, non precisamente definitorie.

6.2.1 Dal descrivere al definire in matematica

La *definizione* è una componente significativa della testualità matematica, ma non solo: molto presente nei manuali scolastici, è un concetto condiviso dai più diversi ambiti del sapere per i quali è fondamentale chiarire concettualmente le entità di cui si occupano, ed è, inoltre, appannaggio del senso comune, per il quale è una sorta di descrizione o spiegazione¹². Lo conferma il *Grande dizionario Italiano dell'uso* (De Mauro, 1999)¹³, in cui al lemma "definizione" si legge che si tratta di una «illustrazione, spiegazione esatta delle qualità, della natura, delle caratteristiche» di qualcosa, sfruttando ciò che si presuppone noto. Nella lingua comune e nella prassi lessicografica l'atto del *definire* non risulta dunque molto distante da operazioni come *descrivere* e *spiegare*: esso, infatti, ha lo scopo strumentale di "far capire", e, per quanto miri all'essenzialità e alla concisione, poco importa se presenta elementi di ridondanza. A conferma di ciò, in ambito linguistico Ježek

12. La *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (<https://plato.stanford.edu/entries/definitions/>) passa sinteticamente in rassegna la varietà possibile di *definizioni* e le loro diverse funzioni, premettendo che «Il discorso ordinario riconosce moltissimi, diversi tipi di cose come possibili oggetti di definizione, e riconosce svariati tipi di attività riconducibili al definire una cosa» (traduzione degli autori).

13. Consultabile all'indirizzo <https://dizionario.internazionale.it/parola/definizione>.

(2010) distingue nettamente due modalità di *definizione* lessicale, quella *definitoria* e quella *esplicativa*, diverse ma entrambe legittime: la prima più analitica e breve, solitamente formata da un iperonimo seguito dalla descrizione degli attributi distintivi, la seconda più estesa e volta a contestualizzare (appunto, a *spiegare*).

In matematica, invece, i verbi *descrivere* e *spiegare* veicolano significati ben diversi fra loro e, soprattutto, diversi da *definire*. Come riferiscono D'Amore e Fandiño Pinilla (2012, p. 36),

L'etimologia (del termine *descrivere*) è semplice ma problematica: viene dal latino "de" che indica compimento di azione e "scribere", scrivere. Ma sta ad indicare una cosa complessa che è quella di fare sì che un emittente faccia riferimento a fatto, persona, luogo, [...] e ne tracci con verosimiglianza una riproduzione in un qualche sistema descrittivo (per esempio semiotico) teso a far sì che il ricevente se ne possa fare un'immagine, un'idea, [...] figurale, o schematica, o fotografica che sostituisca l'originale.

Dal punto di vista della *descrizione* e della *spiegazione* concepite come atti linguistici e come tipi testuali, il bambino fin da molto piccolo viene sollecitato a parlare del mondo che lo circonda e con cui entra in contatto nei diversi contesti; però, in matematica, si chiede prevalentemente agli allievi di fare qualcosa di diverso: si chiede loro di comprendere e formulare definizioni degli oggetti matematici, non di descriverli. In matematica, l'allievo deve dunque acquisire la competenza di passare dall'atto del *descrivere*, più libero, personale e vicino alle sue abitudini linguistiche, all'atto più vincolante del *definire*. Tale passaggio non risulta naturale e intuitivo per gli allievi, soprattutto a causa delle caratteristiche linguistiche specifiche dell'enunciato definitorio matematico, che si presenta come piuttosto vincolato e distante dalle abitudini definitorie spontanee del bambino.

Quando si *definisce* in matematica si stabilisce il significato di una parola o di una espressione verbale mediante una frase costituita da termini il cui significato si presume già noto. Come sosteneva già Euclide nel III secolo a. C., «Definire significa costruire un nuovo concetto partendo da concetti precedenti già definiti» (Euclide, 1970, p. 47), così come, più recentemente, per l'illustre matematico Enriques (1931) una definizione è la

[...] spiegazione d'un concetto (termine o parola con cui si designa) per mezzo di altri concetti (termini o parole) che si presumono noti. La definizione perfetta deve ridurre il definito ai termini per cui si definisce, avendo valore di eguaglianza, sicché già Aristotele enunciava la regola per verificarne l'esattezza: "porre la definizione al posto del definito".

(Enriques, 1931, *Top.*, VII, 4)

È cruciale e interessante osservare come per la matematica elementare il concetto di *definizione* non sia mai sostanzialmente cambiato, anche se le singole definizioni dei termini specialistici si sono evolute nel tempo. A livello di tratti peculiari, infatti, in ambito matematico, la *definizione* ha storicamente sempre avuto la caratteristica di contenere solo informazioni *necessarie* e *sufficienti*, ossia di non dover risultare ridondante. È stato Aristotele stesso a mettere in evidenza nel suo *Organon* che una *definizione*, per essere ben fatta, deve essere chiara e non ridondante:

Del non porre la definizione in modo valido vi sono due parti: una consiste nel servirsi di un'espressione oscura (infatti chi definisce deve usare l'espressione più chiara possibile, giacché è al fine di conoscere che viene proposta la definizione); la seconda si verifica se è enunciato il discorso definitorio di un numero di cose superiore al dovuto: ché tutto ciò che è posto in aggiunta nella definizione è superfluo.

(Aristotele, 1996, p. 238)

Da allora in poi, la *definizione* matematica ha nettamente assunto tali caratteristiche di *sinteticità* e di *eleganza*; tratti che, in altre discipline e nel senso comune, seppur presenti, non sono ritenute così vincolanti.

Quanto espresso permette di evidenziare la differenza di significato che viene attribuita in matematica soprattutto ai termini *definizione* e *descrizione*: quest'ultimo è spesso caratterizzato dalla sovrabbondanza di informazioni e non viene sostanzialmente utilizzato in ambito matematico, se non in fase di apprendimento. La *definizione* in matematica risulta essere dunque particolarmente *precisa*, *concreta* e *densa*, perché in poche battute fornisce numerose informazioni. È chiaro che questi tratti la rendono allo stesso tempo complessa da comprendere e da gestire per gli allievi, che provengono da prassi definitorie spontanee con tutt'altra caratteristiche¹⁴, che spesso si presentano, soprattutto nelle prime fasi, come «formulazioni esplicative» (Cacia *et al.*, 2013, p. 29).

6.2.2 Le definizioni dei testi scolastici: strutture, ridondanza, lessico

Per cercare di comprendere meglio le possibili difficoltà che incontrano gli allievi in fase di apprendimento, approfondiamo ora dal punto di vista descrittivo alcuni aspetti chiave del microatto *definizione*. Come è stato illustrato al **paragrafo 5.4.1**, sul piano strutturale si riscontra una certa variabilità nell'ordine degli

¹⁴. Sulle prassi definitorie spontanee e naturali dei bambini si veda la ricerca di Cacia *et al.* (2013); per le peculiarità delle definizioni di bambini e ragazzi date a parole-termini aventi significati matematici, ma anche altre accezioni (come *area*, *punto*, *figura*), si veda Demartini, Fornara e Sbaragli (2018).

elementi e, quindi, nell'organizzazione informativa: aspetto, questo, che non può non influenzare la lettura, la comprensione e, poi, la costruzione concettuale degli apprendenti; le scelte definitorie possono in effetti incidere su ciò che viene colto dell'oggetto matematico in gioco. Da questo punto di vista, è matematicamente importante osservare non solo l'ordine, ma anche la selezione delle informazioni proposte nelle *definizioni* e l'aspetto lessicale, considerato nelle sue varie sfaccettature. Insomma, pur essendo quello definitorio un microatto ricorrente e significativo in ambito matematico, ciò non significa che la sua forma linguistica sia unica e stabilizzata: anzi, la complessità e la varietà con la quale le definizioni vengono proposte nei manuali – e con cui gli apprendenti si trovano confrontati – risulta essere un interessante terreno di indagine.

Nei prossimi paragrafi prenderemo in considerazione prevalentemente il corpus italiano, per la maggiore varietà di testi e per la maggiore quantità di definizioni in essi presenti; per quanto concerne il corpus svizzero, saranno presenti solo sporadici esempi e commenti sul sub-corpus ticinese (che, ricordiamo, è composto da volumi di due soli editori, dunque fortemente influenzato, nei suoi tratti, da questa variabile). Per l'esiguità delle *definizioni* presenti (come mostrato al **par. 5.3.7.2**), non sono stati considerati i materiali grigionesi.

6.2.2.1 Le strutture

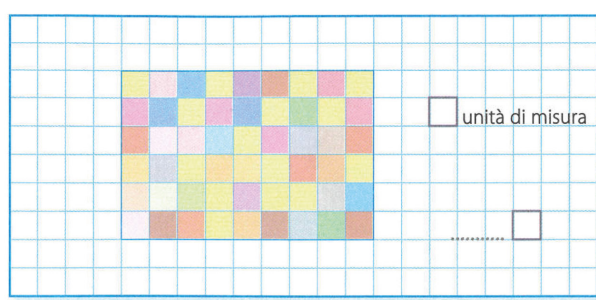
Come si è mostrato al **paragrafo 5.4.1**, a livello di struttura sintattica le *definizioni* possono assumere forme diverse per quanto riguarda l'ordine dei costituenti: ad esempio, se molte definizioni seguono lo schema classico (*definiendum*-copula-*definiens*), può anche verificarsi la collocazione del *definiendum* in fondo alla frase, indipendentemente dal fatto che i contenuti del *definiens* siano stati evocati e attivati nel contesto appena precedente (cosa che sarebbe più opportuna, come spiegato al **par. 5.4.1.4**). Tali scelte non sono ininfluenti, se si considera che l'operazione di processare e rappresentarsi un'informazione può avere un costo cognitivo e implicazioni differenti a seconda della forma linguistica che la veicola: a parità di contenuto, basta una veloce lettura delle frasi "Un quadrilatero è un poligono con quattro lati" e "Ogni poligono con quattro lati si dice quadrilatero" per cogliere qualcosa di diverso, che richiede una diversa azione cognitiva.

Al cambiamento di collocazione del *definiendum* (cioè di *quadrilatero*) consegue il presentarsi prima o dopo di ciò che è, o almeno dovrebbe essere, noto al lettore (nel nostro caso l'iperonimo *poligono*, che ha ruolo di *definiens*), e della specifica distintiva e caratterizzante di ciò che si sta definendo (*con quattro lati*). Alle diverse strutturazioni informative si accompagnano spesso anche differenze lessicali, che incidono non poco sulla natura della *definizione*: ad esempio l'uso del quantificatore *ogni* e il ricorso al verbo impersonale *si dice*, che pone l'accento sull'attribuzione

del termine *quadrilatero* a un insieme di elementi che il lettore dovrebbe riuscire a rappresentarsi sulla base delle sue conoscenze (cioè *Ogni poligono con quattro lati*). Simili osservazioni sulla struttura informativa delle *definizioni* vanno considerate in particolare per comprendere meglio l'impegno del lettore, al quale spetta la sfida di costruirsi una rappresentazione semantica matematicamente corretta. Il lettore, infatti, deve gestire quella che, nella prospettiva linguistica funzionale, si chiama «novità dell'informazione», il "nuovo", la parte informativa non nota, che si contrappone al "dato", ossia a ciò che è già presente e recuperabile in memoria (secondo Halliday, 1985, ripreso in Lombardi Vallauri, 2015, pp. 66-67).

Vediamo un semplice caso in contesto (**Fig. 7**, 4_3, p. 252): la nozione di area viene dapprima attivata nell'apprendente tramite una richiesta pratica, poi, nella definizione ("L'area (A) è la misura della superficie di un poligono"), il termine *area* (il *definiendum*) compare in posizione di topic, e a esso segue la parte informativa (il *definiens*), in posizione di focus (o "comment" o "rema"), cioè la «parte dell'enunciato che ne realizza lo scopo informativo» (Lombardi Vallauri, 2015, p. 88).

- 1** Giovanni ha disegnato un rettangolo utilizzando gli scacchi multicolori.
Conta quanti sono e scrivi il loro numero.



L'**area** (A) è la misura della superficie di un poligono. Per calcolarla, si sceglie una figura piana come unità di misura e si conta quante di queste figure occorrono per ricoprire tutta la superficie del poligono.

Fig. 7 – Una *definizione* di *area* del tipo *definiendum-copula-definiens*, vista in contesto (III primaria).

Strutturalmente analoghe al modello definitorio *definiendum-copula-definiens* sono le definizioni che presentano il *definiens* introdotto dal verbo *avere* invece del verbo *essere*, come la seguente:

- (1) I poligoni regolari hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali. (11_3, p. 75)

Questo apparente dettaglio lessicale potrebbe avere ripercussioni sul modello definitorio matematico che gli apprendenti si stanno costruendo, dato che non propone una definizione che inquadra l'essere dell'ente riconducendolo a una categoria (in questo caso quella dei poligoni che rimane implicita), bensì un formato testuale che, piuttosto, procede per elencazione delle caratteristiche (modalità che si rivela ricorrente nelle *definizioni* degli allievi, **par. 6.2.4**). Sarebbe risultata più efficace per gli allievi una formulazione che rendesse esplicita la categoria di appartenenza, come la seguente:

(1a) I poligoni regolari sono poligoni che hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali.

Oppure come la seguente, basata su un modello definitorio opposto a quello precedente, con "regolari" in posizione di focus:

(1b) I poligoni che hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali si dicono regolari.

Le *definizioni* in sequenza nell'elenco puntato del seguente caso (**Fig. 8**, 13_4, p. 302) mostrano altri esempi di quest'ordine:

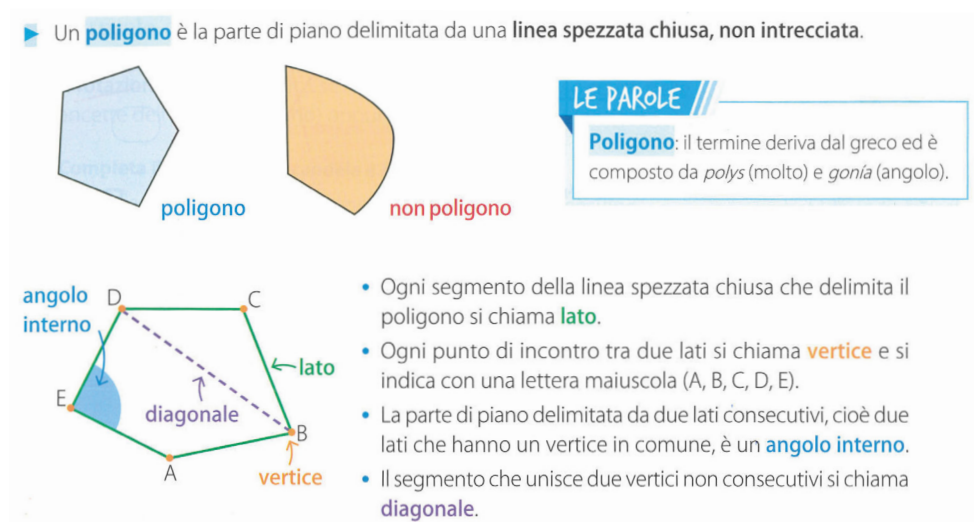


Fig. 8 – Esempi di *definizioni* (nell'elenco puntato) con il *definiendum* in focus, in ultima posizione (IV primaria).

Si è voluta presentare un'ampia parte di pagina per mostrare come, prima dell'elenco di definizioni, da leggere associate alla figura, si abbia solo la definizione di *poligono*. Le singole definizioni vengono attivate mostrandole in figura e sono

strutturate con il *definiendum* in ultima posizione e il *definiens* in posizione di topic (ciò che si sa e rispetto al quale si dice qualcosa di "nuovo": il termine tecnico).

Le strutture definitorie viste fin qui, sebbene maggioritarie, non sono, però, le sole che si incontrano nei testi scolastici: in essi le *definizioni* possono assumere anche forme diverse; ciò è molto marcato nelle 140 *definizioni* del sub-corpus ticinese (libri per la scuola secondaria di primo grado), che presenta frasi con struttura estremamente varia¹⁵. C'è dunque da chiedersi quali siano sia le più convincenti matematicamente, sia le più leggibili e comprensibili per i lettori. Vediamo, qui, un elenco di definizioni che presentano ulteriori strutture sintattiche e informative rispetto a quelle finora approfondite, che sono le più comuni; la rassegna di esempi non pretende di essere esaustiva di tutte le strutture, ma di dare un campione della varietà. Cominciamo con (2), (3) e (4), che propongono la *definizione* attraverso la relazione logica *se... allora...*, con *allora* implicito e, in (4), con *Quando* che assume lo stesso valore di *Se* (pone cioè una condizione). Tale struttura è ricorrente soprattutto nelle *proposizioni* ma non assente nelle *definizioni*:

(2) Se ogni vertice appartiene a due lati la poligonale si dice chiusa. (T3_6, p. 152)

(3) Se un lato è perpendicolare alle basi, il trapezio si dice rettangolo. (c2_6, p. 160)

(4) Quando ogni lato di un poligono ha un solo punto in comune con una circonferenza, il poligono è circoscritto alla circonferenza. (10_7, p. 44)

Si noti che per la (4) è sufficiente tentare di ricondurre queste definizioni al modello *definiens-copula-definiendum* per percepirne la distanza e la complessità. In questi esempi, il *definiendum* va letteralmente cercato dal lettore all'interno dell'enunciato e ricostruito (il trapezio rettangolo; il poligono circoscritto alla circonferenza); poi va connesso alla parte definitoria, che il lettore deve inferire sulla base degli indizi testuali e delle sue conoscenze matematiche: "Il trapezio rettangolo è un trapezio...", "Un poligono circoscritto è un poligono..." Dopo di che, stabilito il genere di appartenenza, va individuata la differenza da esso: "...in cui un lato è perpendicolare alle basi" nella (3) e "ogni lato di un poligono ha un solo punto in comune con una circonferenza" nella (4). Semplificando, se tutto va bene, questo è all'incirca il percorso di processazione che lo studente-lettore dovrebbe compiere con *definizioni* in questo formato.

¹⁵. Sono ad esempio state annotate come *definizioni*: "Ogni lato di un triangolo può essere scelto come base; la relativa altezza è la maggiore distanza di un punto del triangolo dalla retta che contiene la base" oppure "Con l'aiuto della figura di fianco ti diciamo che un punto P è interno se esiste un cerchio centrato in esso e completamente incluso nel poligono. Un punto Q non interno appartiene al contorno della figura. Ogni punto di un poligono è o interno o appartenente al contorno" (entrambe tratte da T3_6, p. 126 e p. 140).

Meno complicate da decodificare sono quelle in cui compare una subordinata relativa (introdotta da *che*) con il verbo *avere* per specificare le proprietà distintive:

(5) I triangoli sono poligoni che hanno 3 lati e 3 angoli. (14_5, p. 305)

Analoghe a queste, alcune (ad esempio (6) e (7)) presentano la preposizione *con* in luogo della forma *che ha/hanno* per introdurre le proprietà caratterizzanti:

(6) TRAPEZI Quadrilateri con almeno una coppia di lati paralleli. (4_5, p. 73)

(7) I quadrilateri sono poligoni con 4 lati e 4 angoli. (17_5, p. 335)

In (6) il verbo *essere* è implicito (“[sono] Quadrilateri”): l’enunciato assume, così, forma nominale.

Scelte ancora diverse, che coinvolgono anche il lessico, si hanno in (8), (9) e (10), enunciati in cui c’è sempre la frase relativa per presentare le caratteristiche specifiche del *definiendum*, ma non si fa ricorso al verbo *essere*, bensì ad altri verbi, che attivano altre semantiche (*si dice/dicono; sono definite*):

(8) Ogni quadrilatero che ha soltanto una coppia di lati opposti paralleli si dice trapezio. (c5_5, p. 302)

(9) Nel linguaggio della geometria, le figure che (come A, D e E) hanno la stessa forma, ma dimensioni in scala sono definite simili. (c3_4, p. 299)

(10) I poligoni che, pur avendo forme diverse, hanno lo stesso perimetro si dicono isoperimetrici. (17_3, p. 90)

Poi ancora, vi sono rare *definizioni* come (11)¹⁶, che portano all’estremo, anche strutturalmente, l’elencazione di proprietà, fino a perdere la compattezza dell’enunciato (qui separato in tre parti):

(11) Il rombo ha quattro lati uguali. I lati opposti sono paralleli. Gli angoli opposti sono uguali. (7_4, p. 277)

Il *definiendum* (il *rombo*) è faticosamente visualizzato nella sua unitarietà e non è ricondotto a un *definiens* di riferimento (il *quadrilatero* o il *parallelogrammo*). Inoltre, le tre frasi in cui è presentato l’enunciato matematico presentano tre soggetti

16. Simile all’esempio (25) del **paragrafo 5.4.1.6**.

diversi: il primo è il *definiens*, il secondo si aggancia all'informazione precedente ripartendo da *lati* (e conferendo a essi un'attribuzione), il terzo passa agli *angoli opposti*.

E potremmo riportarne molte altre, simili eppure diverse, analoghe ma distinte; in qualcosa ovviamente uguali, ma varie al punto da chiedersi se ne esista o dovrebbe esserne una sola, se tutte sono legittime ma se almeno ce n'è una migliore (e secondo quale criterio) e così via. Che cosa si aspetta la matematica come *definizione* ideale lo sappiamo fin dai tempi di Aristotele; sappiamo meno, invece, sul rapporto fra matematica-manuali-allievi, e su quanto le proposte dei libri di testo incidano, a lungo andare, sul costruirsi del modello definitorio dei lettori (che si forma sulla base degli stimoli interiorizzati).

6.2.2.2 La ridondanza informativa

La parola *ridondanza* rimanda all'idea di sovrabbondanza e di eccesso di elementi la cui omissione non porterebbe a una sostanziale perdita di significato. È un concetto complesso e fondamentale nella teoria dell'informazione e del linguaggio (Chiari, 2002), che nelle lingue naturali e nella comunicazione quotidiana ha una sua utilità come forza opposta e complementare all'economia: si fa ricorso a essa ad esempio per essere certi di farsi capire meglio, evitando errori di ricezione. Sulla base dei tentativi precedenti di inquadramento del fenomeno dagli anni '60 in avanti, in Chiari (2002, pp. 150-151) ne è data la seguente definizione:

Un testo è *ridondante* se, ad almeno un livello di analisi, differisce per qualche aspetto da un possibile testo *aleatorio* di elementi distinti funzionalmente, equiprobabili, indipendenti, e in cui ogni combinazione di elementi è una sequenza accettabile del codice. Quindi si ha ridondanza quando: a) *più elementi di uno stesso livello coprono la stessa funzione distintiva (ridondanza verticale)*; b) *gli elementi di un livello hanno diverse frequenze di occorrenza, o vi sono restrizioni alle combinazioni di elementi nelle sequenze (ridondanza orizzontale)*.

Quella che ci interessa, qui, in modo particolare non è la *ridondanza grammaticale* della lingua (legata alla strutturazione del sistema linguistico stesso), bensì quella *enunciativa*, cioè quella che si esprime nell'uso comunicativo: procurata da esigenze diverse, una su tutte quella di farsi capire, la *ridondanza enunciativa* è segnale dell'estrema elasticità e adattabilità della lingua, fatta di ripetizioni, precisazioni, aggiunte e così via.

Nelle *definizioni* matematiche, tenendo presente il punto a) della definizione sopra riportata, la ridondanza si verifica quando, seguendo le parole di Aristotele, è presente un numero di elementi superiore al dovuto, che risultano dunque superflui.

Per cercare di quantificare l'incidenza del fenomeno nel corpus italiano, è stato selezionato un campione sufficientemente rappresentativo ed equilibrato rispetto al totale delle *definizioni* dei testi di ogni classe, ed è stato poi effettuato un conteggio di quante di queste risultano ridondanti. Più precisamente, sono state analizzate per la II primaria e la III secondaria di primo grado tutte le *definizioni*, essendo il campione limitato; invece, dalla III primaria alla II secondaria di primo grado sono state considerati rispettivamente metà, un quinto, un terzo, un settimo e un terzo delle definizioni rispetto al totale. Si riporta in **Tabella 5** l'esito di *definizioni ridondanti* che è emerso nel campione individuato:

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Ridondanti	1 (2,86%)	9 (11,84%)	28 (21,71%)	33 (25,98%)	42 (18,42%)	7 (7,69%)	3 (7,50%)
Totale	35 (100%)	76 (100%)	129 (100%)	127 (100%)	228 (100%)	91 (100%)	40 (100%)

Tab. 5 – Distribuzione per anno delle *definizioni ridondanti* nel corpus italiano rispetto al campione.

Si nota come, a eccezione della II primaria, per ogni classe almeno il 7,5% delle *definizioni* risulta *ridondante*, e in tutti gli anni dalla IV primaria alla I secondaria di primo grado la quantità di *definizioni ridondanti* risulta superiore al 18%; il picco si ha in V primaria con il 25,98% di *definizioni ridondanti*: più di una definizione ogni quattro. Non sembra quindi esserci l'intenzione di abituare gli studenti sempre di più, man mano che procedono nel loro percorso di apprendimento, alle caratteristiche di concisione che le *definizioni* matematiche dovrebbero avere, dato che la percentuale di *definizioni ridondanti*, in generale, non decresce con il progredire del livello scolastico.

Osservando nel dettaglio le *definizioni ridondanti* individuate nei testi, si possono riconoscere alcuni tipi ricorrenti, come quelli rappresentati dalle seguenti due definizioni:

(12) I triangoli sono poligoni che hanno 3 lati e 3 angoli. (5_4, p. 252)

(13) I quadrilateri sono poligoni con 4 lati e 4 angoli. (17_5, p. 335)

Nel campione considerato si trovano ben 51 casi in cui i triangoli o i quadrilateri sono definiti facendo riferimento sia al numero di lati sia al numero di angoli. Da questo dato si può comprendere come la distribuzione delle *definizioni ridondanti*

sia strettamente legata, oltre che a fattori come lo stile dei testi, alla presenza di argomenti le cui *definizioni* hanno assunto una formulazione standard, seppur *ridondante*, nei testi scolastici. Spesso, come in questi casi, si tratta di *definizioni* che mettono in evidenza nel *definiendum* informazioni non necessarie, che sarebbero deducibili dal restante contenuto della *definizione*; in questo caso, se un triangolo ha tre lati, avrà per forza ad esempio tre angoli e dunque anche tre vertici. La presenza di informazioni sovrabbondanti si riscontra anche nell'esplicitazione di più proprietà riferite agli stessi oggetti geometrici. Nei seguenti esempi risultano sovrabbondanti l'uguaglianza o il parallelismo dei lati per la *definizione* (14), informazioni entrambe vere ma solo una necessaria, così come la congruenza o il fatto di avere angoli retti per la (15):

(14) I quadrilateri con due coppie di lati uguali e paralleli si chiamano parallelogrammi. (9_4, p. 362)

(15) Un rettangolo è un parallelogramma con tutti gli angoli congruenti e retti. (14_6, p. 710)

Questa ridondanza nelle *definizioni* risulta a volte talmente accentuata da presentarsi come un'elencazione di caratteristiche, divenendo dunque più una *descrizione* che una *definizione*:

(16) I quadrilateri sono poligoni con 4 lati, 4 vertici, 4 angoli e 2 diagonali. (c3_4, p. 306)

La scelta di essere ridondante in una *definizione* potrebbe rendere l'informazione più completa ed esaustiva per il lettore soprattutto in fase di apprendimento, ma lo allontana certamente dal fargli cogliere quali sono le condizioni necessarie e sufficienti per definire un oggetto geometrico, esigenza che è forte nel mondo matematico, ma che è distante dalla prassi degli studenti, abituati a descrivere la realtà che li circonda tramite aggettivi, sostantivi, descrizioni anche ridondanti che rafforzano ciò che si vuole far percepire all'interlocutore. Ci si può dunque domandare se non si possa fare una scelta più consapevole nei libri di testo: descrivere tutte le caratteristiche di un oggetto geometrico al fine della comprensione del sapere in gioco e, allo stesso tempo, allenare il lettore a cogliere quali sono le informazioni necessarie e sufficienti per definirlo.

Un'altra categoria riconoscibile tra le *definizioni ridondanti* è quella delle *definizioni* in cui un concetto già noto viene richiamato in più modi equivalenti. Viene così spiegato (e sostanzialmente ridefinito) anche il *definiens*, o parte di esso, spesso utilizzando il *connettivo riformulativo* cioè:

- (17) La misura della parte di piano occupata da un poligono, cioè la misura della sua superficie, si chiama area. (17_3, p. 92)
- (18) Il trapezio isoscele ha i lati obliqui congruenti, cioè della stessa lunghezza. (10_4, p. 320)
- (19) Il perimetro (p) di una figura è la misura del suo contorno, cioè della linea spezzata chiusa che lo delimita. (c4_4, p. 310)
- (20) [Un poligono] È concavo quando ha almeno un angolo interno concavo, cioè maggiore di 180° . (12_5, p. 320)
- (21) Un poligono è regolare se ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti, cioè se è equilatero ed equiangolo. (c1_7, p. 290)

Da questi esempi sembra emergere come, nei testi, le *definizioni* non siano sempre usate con il solo scopo di definire un nuovo concetto, ma vengano a volte sfruttate come occasione per ripetere il significato di parole o espressioni che lo studente dovrebbe già conoscere.

Segnaliamo infine che nel campione è stato trovato anche un caso (che corrisponde all'unica *definizione ridondante* nei testi di Il primaria) di *definizione* di tipo *esemplificativo*:

- (22) Le figure che non hanno spessore, come il rettangolo, il quadrato, il triangolo, il cerchio, sono figure piane. (2_2, p. 71)

Come si vedrà nel **paragrafo 6.2.4**, si tratta di una modalità frequente nelle *definizioni* dei bambini, non solo quelli più piccoli.

6.2.2.3 Il lessico delle definizioni

La caratterizzazione lessicale delle *definizioni* è un aspetto cruciale per capire a fondo il linguaggio della matematica e riflettere didatticamente su di esso. Il lessico, infatti, assieme alla sintassi, determina in modo significativo la *leggibilità*¹⁷ e la *comprensibilità* di questi enunciati (come del resto del testo); un testo, infatti, può contenere parole di tipo diverso (possono essere appartenenti al Vocabolario di Base oppure no; possono essere più sostantivi oppure più forme verbali ecc.), può presentarsi come lessicalmente più o meno ricco (cioè, presentare poche o molte

17. Una spiegazione di questo concetto è data nel **capitolo 4** di questo volume.

parole diverse), e contenere molti o pochi *hapax*, cioè lemmi che compaiono una sola volta; può anche essere più o meno denso (ossia, avere molte oppure poche parole “piene”, portatrici di significato, rispetto al totale delle parole).

Alla luce di queste distinzioni, osserviamo le seguenti quattro *definizioni*, ricorrenti in vari testi scolastici con variazioni più o meno marcate:

(23) Un quadrilatero è un poligono con quattro lati. (19_6, p. 152)

(24) Ogni poligono con quattro lati si dice quadrilatero. (11_6, p. 328)

(25) I quadrilateri sono poligoni con 4 lati e 4 angoli e possono essere classificati in base alle caratteristiche degli angoli e dei lati. (13_4, p. 306)

(26) Fra tutti i quadrilateri, alcuni si chiamano trapezi: sono quelli che hanno almeno una coppia di lati paralleli. (3_4, p. 332)

Tralasciando gli aspetti morfosintattici (l'ordine degli elementi, la scelta di plurale o singolare), è evidente che il lessico è diverso: non quello specialistico (*poligono, quadrilatero, lati...* termini-parole che però, fra l'altro, spesso appartengono anche al Vocabolario di Base), ma parole cruciali a livello funzionale e semantico: *ogni/un/i/tutti, alcuni, è/sono/si dice*. In altri casi, anche alcuni termini specialistici fra i meno vincolanti possono variare: ad esempio possono comparire alternativamente *uguale* e *congruente*, oppure insidiose espressioni figurate come *si appoggia* in riferimento alla *base* (sovente virgolettate a marcarne il distanziamento e il valore non tecnico).

Fatte queste premesse, e rinviando al **capitolo 7** per una presentazione più esauritiva del vocabolario e dei tratti significativi del lessico nell'intero corpus italiano¹⁸, rispetto alle *definizioni* ci è parso interessante analizzare, classe per classe, i seguenti aspetti (**Tab. 6**), con l'ausilio di strumenti per il trattamento automatico del linguaggio:

- Quantificazione delle parole delle *definizioni* riconducibili al Vocabolario di Base (VdB), cioè alle circa 7'500 parole fondamentali (FO), di alto uso (AU) e di alta disponibilità (AD) – così classificate secondo criteri di frequenza e di percezione dei parlanti (De Mauro, 1980; *Nuovo vocabolario di base* in De Mauro, 2016a) –, che sono usate e comprese dalla maggior parte di coloro che parlano italiano.

¹⁸. Le misurazioni sul sub-corpus ticinese (scuola secondaria di primo grado) si allineano ai dati riportati nelle varie tabelle.

- *Ricchezza lessicale media (Type-Token Ratio, TTR)*¹⁹: è il rapporto tra il numero di *type* o lemmi di un testo (convenzionalmente indicato con V: l'ampiezza del corpus) e numero di *token* o occorrenze (convenzionalmente indicato con N); è un valore compreso fra 0 e 1 (oppure espresso in forma percentuale) che indica la varietà di parole diverse contenute in un testo: più è alto, più è vario (cioè più vicino è a 1, più variato sarà il testo analizzato).
- *Densità lessicale media*: è il rapporto fra le occorrenze delle parole piene (portatrici di contenuto, Ježek, 2005) e il totale delle parole di un testo; nel linguaggio quotidiano, l'indice di densità si aggira tipicamente intorno a 0,3 o al massimo 0,4.

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Parole del VdB	93%	87%	85%	84%	83%	80%	76%
Ricchezza lessicale media (TTR)	0,96	0,96	0,93	0,91	0,89	0,93	0,95
Densità lessicale media	0,62	0,57	0,59	0,61	0,56	0,56	0,53

Tab. 6 – Profilo lessicale degli enunciati *definizione* nei testi delle diverse classi del corpus italiano.

Il dato sulle parole del VdB merita una precisazione: molti termini della matematica legati all'argomento *poligoni* sono parole-termini, ossia parole che, statisticamente, rientrano anche nel VdB, con uno o più significati nell'uso comune (non del tutto tecnici e precisi: si pensi alla parola *angolo*); inoltre, spesso, possono veicolare varie altre accezioni semantiche (ad esempio significati figurati). La difficoltà degli apprendenti, dunque, non sta tanto o, almeno, non solo nel dover gestire tecnicismi completamente nuovi e rari, ma, spesso, nel dover ridescrivere i significati di termini tecnici circolanti anche nella lingua dell'uso. Se si dovessero conteggiare i tecnicismi matematici designati da parole appartenenti al VdB, in particolare sostantivi e, in minor misura, aggettivi qualificativi, allora l'impatto dei tecnicismi sarebbe ancora più evidente, in quanto resterebbero fuori quasi soltanto le parole funzionali (come articoli, preposizioni, connettivi), alcuni aggettivi come gli indefiniti e i determinativi, e molti verbi, che solo in alcuni casi veicolano tratti e significati specialistici della disciplina.

Vediamo ad esempio la seguente definizione per la III primaria, considerata di leggibilità difficile per lettori di quest'età (con indice *Gulpease* 55, **par. 6.2.2.4**):

¹⁹. "Media" in quanto è il risultato della media tra i valori di TTR delle singole *definizioni*.

(26) Un poligono è una *figura geometrica* **piana** delimitata da una **linea chiusa**, **spezzata**, **semplice**. (4_3, p. 249)²⁰

Su 14 parole grafiche (cioè sequenze di lettere distinte e separate l'una dall'altra)²¹, ben 10 sono parole "piene", dotate di significato, di diverso tipo, ma per lo più (tranne è) portatrici di informazione matematica: *poligono*, *è*, *figura*, *geometrica* (queste andrebbero intese assieme: *figura geometrica*), *piana*, *delimitata*, *linea*, *chiusa*, *spezzata*, *semplice*; 4, invece, sono parole "funzionali" (grammaticali): *un*, *una*, *da*, *una* (per altro riconducibili a due soli lemmi: *un/-a*; *da*). È quindi una *definizione* lessicalmente (e anche informativamente) densa poiché le parole piene prevalgono nettamente su quelle funzionali e poiché assolve a diversi compiti informativi; ed è anche molto ricca, nel senso che il lessico è estremamente vario (e lo è tutto a carico delle parole piene, che sono tutte diverse e mai ripetute). Sono tutte parole che rientrano nel VdB; eppure, sono tutt'altro che semplici, se si considera che vanno colte nel significato tecnico-specialistico della geometria: in quest'ambito, l'aggettivo *spezzata*, per quanto intuitivo e con sovrapposizioni con l'uso comune, va rielaborato dal lettore con un nuovo e adeguato senso geometrico.

Per le ragioni illustrate in riferimento al caso commentato, la ricchezza lessicale media si attesta su indici altissimi nelle *definizioni*: cosa che non stupisce, se si considera che nelle *definizioni* sintetiche della matematica quasi ogni parola è portatrice di un significato indispensabile e tende a venire ripetuta solo se strettamente necessario. Infine, il dato sulla densità lessicale conferma, portandolo all'estremo, quanto affermato da Voghera (2004), e cioè che a testi sintatticamente compatti – quali sono, per eccellenza, le definizioni matematiche – corrisponde un'alta densità lessicale.

Oltre alle misurazioni in **Tabella 6**, l'analisi lessicale delle *definizioni* del corpus italiano si è rivolta anche ai seguenti ambiti:

20. Qui le marche di enfasi (corsivo e grassetto) non sono del libro di testo, ma servono a distinguere la categoria delle parole in fondamentali (tondo grassetto), alto uso (tondo chiaro), alta disponibilità (corsivo chiaro). Ci si è attenuti alla convenzione usata in De Mauro (2016a).

21. Sulla complessa definizione di che cosa si possa intendere, praticamente e concettualmente, con "parola" si rimanda a De Mauro (2005). Negli studi basati sull'analisi di corpora linguistici è importante di volta in volta specificare che cosa si intenda con "parola", in quanto possono ad esempio essere considerate parole semanticamente uniche polirematiche come "ferro da stiro" o "acqua e sapone": polilessicali (cioè composte da più parole grafiche), ma dal significato unitario; rimanendo nel nostro specifico ambito matematico, sono esempi di polirematiche *unità di misura* o *asse di simmetria*, il cui significato non è ricavabile dai singoli significati delle parti. Cosa diversa sono le collocazioni, cioè co-occorrenze abituali e privilegiate di parole, e gli abbinamenti peculiari, come *poligono regolare*, *angolo retto*, *base maggiore* e simili.

- Distribuzione delle parti del discorso più significative, così da capire qual è la categoria grammaticale prevalente nell'ottica di cogliere la *deagentivizzazione* e la *nominalizzazione* del discorso (**Tab. 7**).
- Peculiarità specifiche: sostantivi e verbi più ricorrenti (in particolare, in quante *definizioni* si trova il verbo *essere*, in quante *avere*, e in quante *si dice/si dicono*, è *detto/sono detti*); connettivi più frequenti; presenza di particolari quantificatori (*ogni, tutti, ciascuno*) o aggettivi (*equivalente/-i*)²².

La distribuzione delle parti del discorso più significative è mostrata in **Tabella 7**, in cui si riporta la presenza delle principali categorie di parole “piene” (sostantivi, verbi, aggettivi) e dei connettivi, categoria d'interesse in quanto funzionalmente preposta a esplicitare i legami logici del testo.

Parte del discorso	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Sostantivi	29,01%	30,21%	27,00%	29,43%	26,17%	26,36%	27,50%
Verbi	14,15%	13,50%	13,06%	12,00%	12,57%	12,29%	14,48%
Aggettivi	12,11%	6,57%	9,00%	8,30%	9,41%	9,25%	5,62%
Connettivi	1,50% (di cui 88,12% coordinanti e 11,88% subordinanti)	1,98% (di cui 82,36% coordinanti e 17,64% subordinanti)	3,60% (di cui 79,54% coordinanti e 20,46% subordinanti)	2,58% (di cui 87,51% coordinanti e 12,49% subordinanti)	5,26% (di cui 56,86% coordinanti e 43,13% subordinanti)	4,29% (di cui 50% coordinanti e 50% subordinanti)	4,64% (di cui 55,33% coordinanti e 44,67% subordinanti)

Tab. 7 – Andamento della distribuzione delle principali parti del discorso nelle *definizioni* dei testi dei diversi anni del corpus italiano.

I dati relativi alla presenza di queste categorie grammaticali negli enunciati di tipo *definizione* non fa che confermare delle tendenze e delle particolarità percepibili a livello qualitativo: la netta dominanza della componente legata ai nomi rispetto ai verbi, cosa che rende il testo *deagentivizzato* e *atemporale*, com'è tipicamente la *definizione*, formato testuale peculiare del testo di matematica.

Un ultimo aspetto d'interesse nell'esplorazione del lessico delle *definizioni* consiste nel ricavare una visione d'insieme di alcune peculiarità specifiche a livello di frequenza dei lemmi. Cominciamo con i verbi e i sostantivi più presenti, nei diversi sub-corpora classe per classe (**Tab. 8**):

²². Per questi dati ci si è avvalsi dell'uso combinato di TalTac^{2.10}, Corrigel.it, READ-IT, Sketch Engine e AntConc, e del confronto fra le diverse estrazioni per validarle.

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Sostantivi	1. figura, 25; 2. linea, 25; 3. poligono, 24; 4. confine, 16; 5. superficie, contorno, regione, 4.	1. poligono, 104; 2. lato, 61; 3. misura, 44; 4. linea, 36; 5. figura, 34.	1. lato, 318; 2. poligono, 191; 3. angolo, 144; 4. triangolo, 100; 5. base, 94.	1. lato, 214; 2. poligono, 187; 3. angolo, 106; 4. triangolo, 71; 5. segmento, 58.	1. lato, 1'197; 2. angolo, 616; 3. triangolo, 511; 4. poligono, 469; 5. vertice, 331.	1. poligono, 322; 2. circonferenza, 306; 3. lato, 198; 4. vertice, 94; 5. raggio, 90, superficie, 90.	1. circonferenza, 50; 2. poligono, 40; 3. raggio, 18; 4. punto, 15; 5. centro, 13.
Verbi	1. chiamare/-rsi, 16; 2. essere, 15; 3. avere, 13; 4. chiudere; 5. delimitare.	1. essere, 83; 2. chiamare/-rsi, 36; 3. avere, 26; 4. delimitare, 21; 5. dire, 17.	1. essere, 320; 2. avere, 160; 3. chiamare/-rsi, 74; 4. potere, 43; 5. dire, 38.	1. essere, 194; 2. avere, 96; 3. chiamare/-rsi, 39; 4. unire, 32; 5. potere, 30.	1. essere, 822; 2. dire, 482; 3. avere, 391; 4. chiamare/-rsi, 147; 5. formare, 84.	1. essere, 314; 2. dire, 238; 3. inscrivere, 98; 4. avere, 84; 5. circoscrivere, 74.	1. dire, 27; 2. essere, 23; 3. inscrivere, 14; 4. circoscrivere, 8; 5. avere, 6.

Tab. 8 – I sostantivi e i verbi più frequenti nelle *definizioni* in ordine di rango decrescente (primi 5); dopo la virgola si trova il numero di occorrenze.

Si noti la presenza fra i verbi più attestati di *avere*, che tende a scendere in quarta e in quinta posizione solo dalla II secondaria di primo grado (SSPG); è comunque generalmente secondo a *essere* (copula definitoria per eccellenza) e, in II e III primaria (SP), e in I SSPG, anche a *chiamare/-rsi* (*si chiama/si chiamano/è chiamato/sono chiamati*) e a *dire* (*si dice/si dicono/è detto/sono detti*).

Un caso specifico di lessema di particolare interesse è quello del sostantivo in forma di locuzione al negativo (*non poligono*), attestato solo nel sub-corpus di testi per la primaria, con 13 occorrenze (al singolare e 8 al plurale) tutte in testi diversi, che quindi scelgono indipendentemente di proporre questa categoria priva di fondamento: 4 volte in II SP, 4 in III SP, 4 in IV SP e 1 in V SP. Ecco alcuni esempi d'uso in contesto: "La figura piana che ha per confine una linea curva chiusa o mista chiusa si chiama non poligono"; "Una figura piana delimitata da una linea curva o mista chiusa è un non poligono"; "Le figure piane delimitate da una linea curva o mista sono non poligoni". Ogni volta che l'espressione compare è in ultima posizione. Per quanto concerne gli aggettivi, invece, un termine di particolare interesse matematico è l'uso di *equivalente/-i*: esso non compare nelle definizioni di II, III, compare 5 volte in IV SP e 1 volta in V SP, non compare in I SSPG, poi è attestato con 25 occorrenze in II SSPG, mentre non lo è in III SSPG. Tale aggettivo è per lo più riferito a *poligono* o a *figura*, oppure è proposto come sinonimo di *equiesteso* (in riferimento a figure con la stessa area).

A livello di connettivi è invece interessante notare come i rari connettivi presenti nelle *definizioni* di II e III SP consistano in massima parte nella congiunzione *e*, mentre solo dalla IV iniziano ad aumentare numericamente (se ne contano 206 in

totale) e a manifestarsi in forme più varie (domina sempre la relazione di aggiunta e, ma, ad esempio, al secondo posto si ha il *cioè* e al terzo il *se*). È però solo nelle *definizioni* per la secondaria di primo grado che il repertorio lessicale dei connettivi si amplia: nel sub-corpus di I SSPG al secondo posto in ordine di frequenza dopo e compare *se* (analogamente alla primaria), confermando che la relazione *se* [*allora*], con *allora* implicito, è peculiare del modo di presentare le *definizioni*; a questi, seguono *o*, *sia... sia...*, *quindi*, *cioè*, *mentre*, *ma* e *poiché* (quest'ultimo con solo 2 occorrenze). Ancor più significativo è che la congiunzione *se*, nelle *definizioni* per la II SSPG, è presente 140 volte e la *e* 166, mostrando così l'affermarsi della modalità definitoria con il *se* (del tipo "Un poligono si dice inscritto in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza"), che si conferma in III SSPG.

6.2.2.4 La leggibilità delle definizioni

Da ultimo, e ricordando che, per questo parametro, non viene considerata la componente lessicale ma quella sintattica (e nello specifico lunghezza di parola e di frase), è interessante offrire una panoramica della *leggibilità* delle *definizioni* in verticale, dalla II primaria (SP) alla III secondaria di primo grado (SSPG)²³. Iniziamo con un dato meramente numerico, ma significativo, cioè quello della lunghezza media delle definizioni (parole/frase), che vede minime oscillazioni nella primaria e maggiore lunghezza nei testi per la secondaria di primo grado: le definizioni di II, III e IV SP contengono una media di 12 parole per frase; quelle per la V SP 11 parole; quelle per la I SSPG 13; quelle per la II SSPG 14; quelle per la III SP 17.

La **Tabella 9** mostra invece i valori dell'*indice di leggibilità* delle *definizioni* dei testi nelle diverse classi del corpus italiano:

²³. Sono state analizzate tutte le *definizioni* estratte dai testi per i diversi anni, distinguendo anno per anno; la numerosità del campione di ciascun anno è diversa in quanto è quantitativamente diverso il numero di *definizioni* presenti nei testi (par. 5.3.7.1).

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
<i>Leggibilità media delle definizioni (indice Gulpease)</i>	65	68	66	67	64	60	56
<i>Leggibilità minima delle definizioni (indice Gulpease)</i>	54	50	42	39	32	41	44
<i>Leggibilità in relazione al livello scolastico</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>
					Media: <i>facile</i>	Media: <i>facile</i>	Media: <i>difficile</i>

Tab. 9 – La misurazione della *leggibilità* delle *definizioni* nei testi dei sub-corpora delle varie classi (corpus italiano).

Tali dati sono stati ricavati con il software *Corrige.it*, che si avvale dell'indice di leggibilità *Gulpease*, che ricordiamo essere così calcolato:

$$89 - (LP/10) + (FR \times 3)$$

in cui LP = lettere \times 100/totale delle parole e FR = frasi \times 100/totale delle parole.

Il valore che si ottiene è compreso tra 0 e 100 (più è alto più un testo è leggibile); *Gulpease* mette anche in relazione la misura della leggibilità (prima riga della **Tab. 9**) con il livello d'istruzione dei destinatari, determinando se per loro un testo è "quasi incomprensibile", "molto difficile", "difficile", "facile", "molto facile" (terza riga **Tab. 9**). In generale,

- chi ha un'istruzione elementare comprende facilmente testi con un indice maggiore di 80;
- chi ha un'istruzione media comprende facilmente testi con un indice maggiore di 60;
- chi ha un'istruzione superiore comprende facilmente testi con un indice maggiore di 40²⁴.

24. Si parla di istruzione "elementare", "media", "superiore" perché questa è la terminologia rimasta in uso nel software (**Fig. 9**). Si fa notare che, per le classi di primaria, il livello di difficoltà presenta una stima senz'altro ottimistica, in quanto il software ipotizza dei lettori già in possesso di titolo di studio elementare, mentre i nostri destinatari ancora non lo sono; analogamente, per la secondaria di secondo grado si riportano entrambe le stime di *leggibilità* (per lettori con istruzione elementare e con istruzione media), in quanto, a tutti gli effetti, i destinatari dei testi hanno completato solo il ciclo d'istruzione elementare.

Se ne ricavano anche a una prima lettura interessanti elementi di riflessione: uno su tutti, la grande difficoltà di lettura degli enunciati *definizione* proposti alla scuola primaria; anche la situazione per la secondaria di primo grado merita, però, un'osservazione, in quanto in prima i testi propongono moltissime *definizioni*, che risultano ostiche da decodificare e capire, riportando anche il valore più basso dell'indice (32), che mostra come vi siano *definizioni* di difficile lettura anche per persone con un'istruzione superiore. Le *definizioni* per la III secondaria di primo grado, poi, risultano complesse anche per chi avesse già completato tale ciclo scolastico.

Vediamo più nello specifico il dato di V primaria. L'immagine riportata in **Figura 9** mostra com'è la leggibilità media delle *definizioni* dei libri di testo del sub-corpus per questa classe (anno in cui i libri ne propongono moltissime per l'argomento *poligoni*) per i diversi profili di lettore:

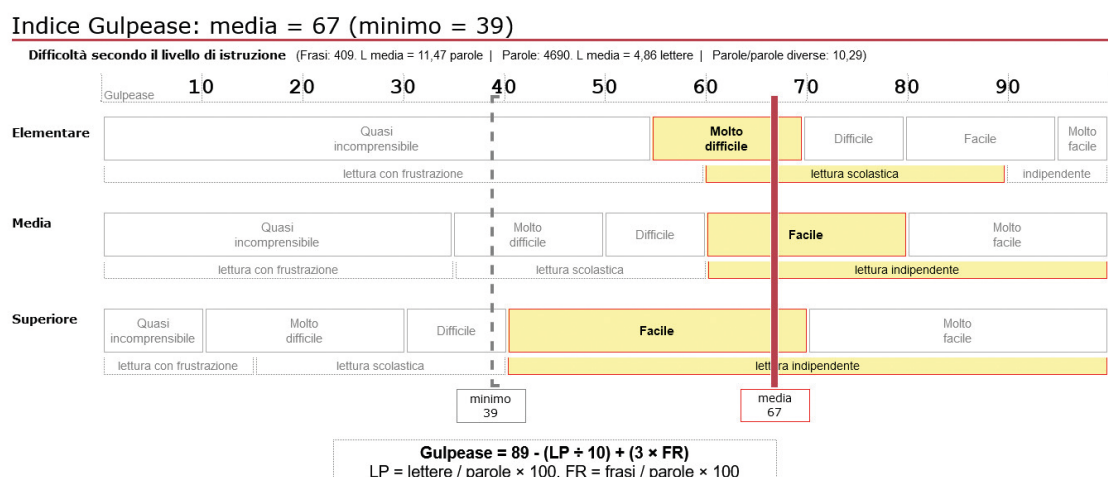


Fig. 9 – Sintesi della misurazione della *leggibilità* degli enunciati di tipo *definizione* nei libri italiani, sub-corpus classe V primaria.

Si noti che, in media, le *definizioni* sono “molto difficili” per i fruitori (bambini che non hanno ancora concluso il ciclo d'istruzione primaria), e idonee solo a essere affrontate come “lettura scolastica”, cioè guidata, onde evitare la frustrazione data dall'incontro con un testo al di là dei propri strumenti. Sarebbero “facili” anche in autonomia solo se proposte a persone più grandi, addirittura con un'istruzione superiore (diploma di secondaria di secondo grado). Per contro, il minimo valore di *Gulpease* rilevato (39) mostra come vi siano delle *definizioni* considerate come testo “quasi incomprensibile” per utenti con scolarità primaria.

Ad esempio, per un apprendente di V scuola primaria, l'enunciato *definizione* (27) è segnalato come "quasi incomprensibile" in lettura autonoma:

(27) L'altezza di ognuno di questi triangoli, che corrisponde al segmento che unisce il centro del poligono con la metà di ciascun lato, si chiama apotema.
(c5_5, p. 317)

La ricchezza e la densità lessicale (e informativa) sono senz'altro evidenti, ma è la componente sintattica, caratterizzata da un lungo inciso contenente due *che* ricorsivi, a complicare ulteriormente la lettura e l'interpretazione del testo, soprattutto per un lettore che ha una competenza linguistica (generale e matematica) ancora in costruzione.

6.2.3 Aspetti di numero nelle definizioni

In questo paragrafo approfondiremo alcuni aspetti di variabilità nella resa della categoria grammaticale di *numero* all'interno delle *definizioni*, che potrebbe generare ulteriori ostacoli nella comprensione da parte del lettore. Si è scelto di concentrare l'attenzione sugli aspetti linguistici e non su quelli figurali, osservando nel dettaglio un sub-corpus di 79 porzioni di testi scolastici in cui vengono definiti gli elementi dei poligoni: *vertici, lati, diagonali, angoli* ecc.²⁵

6.2.3.1 La categoria grammaticale di numero

Il *numero* è la categoria grammaticale che serve a codificare e a veicolare la quantità di ciò a cui ci si riferisce (Grandi, 2010). La sua realizzazione linguistica assume tipicamente le caratteristiche del singolare o del plurale: «il singolare indica che il referente cui si rimanda è "uno", il plurale indica invece una "pluralità" di referenti» (Salvi & Vanelli, 2004, p. 131). Nonostante questo tratto di naturalezza nella distinzione tra le due categorie, diventa estremamente interessante approfondire le scelte operate nella manualistica scolastica di matematica che spesso non si attiene a un'*aderenza* sistematica con la numerosità degli enti di cui parla, ma opera scelte comunicative diverse, che possono non favorire la rappresentazione semantica del contenuto.

In italiano, oltre alla marca morfologica altri elementi linguistici servono a distinguere singolare e plurale: nel loro insieme prendono il nome di *quantificatori* (De Santis, 2011). Le diverse modalità di quantificazione più significative e diffuse (rielaborando le descrizioni e le categorie di De Santis, 2011; Salvi, 2013; Salvi &

25. L'analisi è una sintesi di quanto presentato in Canducci, Demartini e Sbaragli (2021).

Vanelli, 2004) riguardano principalmente quattro tipi: *articoli*; *quantificatori definiti*; *quantificatori indefiniti intrinseci*; *quantificatori indefiniti estrinseci*. Gli *articoli* sono una categoria fra le più semplici in italiano e possono essere determinativi (o definiti) singolari e plurali (*il, lo, la, i, gli, le*) o indeterminativi (o indefiniti) singolari e plurali (*un, una* e al plurale *dei, delle*, ricorrendo alle preposizioni articolate). L'articolo determinativo (o definito) può assumere anche la funzione di «marcare un nome come esponente di una intera classe, attribuendogli quindi valore generico e non referenziale» (Grandi, 2010): "La scuola è importante", "La libertà vale molti sacrifici". I *quantificatori definiti* esprimono la numerosità in modo preciso: lo sono quindi i numerali *uno, due* ecc. I *quantificatori indefiniti intrinseci* hanno solo forma singolare (*ciascuno, nessuno, ogni, qualunque, qualsiasi* ecc.) e sono detti anche *quantificatori esistenziali* con valore distributivo o moltiplicativo, in quanto focalizzano l'attenzione sui singoli elementi di una collettività effettiva; caso a sé fa *tutti*, che rimanda, invece, a un insieme di elementi (o a *tutti* gli elementi nel loro insieme). È ascrivibile a questa categoria anche la combinazione di *uno/-a* o *ciascuno/-a* (con valore di proforma) + complemento partitivo ("Il lato è uno dei segmenti..."), che individua una singola entità nel quadro di una pluralità di altre entità analoghe. Infine, i *quantificatori indefiniti non intrinseci* esprimono quantità approssimate secondo una scala graduata non omogenea: lo sono quindi aggettivi e pronomi indefiniti come *pochi, alcuni, molti, tanti, vari* ecc., prevalentemente al plurale. Fanno capo a questa categoria anche sostantivi presenti in locuzioni stabilizzate come *un po' di...*, *un mucchio di...* quantificatori generici molto comuni soprattutto nel parlato.

Da un primo sguardo alle caratteristiche di queste categorie di quantificazione emerge una peculiarità: laddove non si utilizzino in modo esplicito *quantificatori definiti*, le risorse linguistiche per il plurale non consentono di stabilire il *numero* esatto degli elementi di cui si sta parlando. Questa caratteristica del linguaggio naturale risulta di non banale importanza per un'analisi nell'ambito della matematica, in cui spesso entrano in gioco diverse numerosità, che in molti casi coinvolgono l'infinito. Si pensi ad esempio al fatto che un poligono è una figura piana che può avere un numero di lati (e dunque di vertici, di angoli interni ecc.) di qualsivoglia quantità maggiore o uguale a tre: come rendere questa caratteristica attraverso una definizione compatta che, linguisticamente, prevede un'unica distinzione, quella fra singolare (*uno*) e plurale (*più di uno*, oppure *tutti*)?

Dal punto di vista del rapporto con la lingua naturale e con i suoi strumenti espressivi, questa caratteristica matematica ha conseguenze problematiche, perché «la cardinalità (potenziale) degli insiemi di figure è ben maggiore di quella delle espressioni linguistiche. Quindi lo strumento linguistico non sarà mai sufficiente a descrivere esaurientemente i fatti geometrici. Ci dobbiamo comunque preoccupare di renderlo il più adeguato possibile» (Speranza, 1997, p. 5).

6.2.3.2 Omogeneità-disomogeneità di numero e aderenza forma-contenuto

Per chiarire che cosa intendiamo con *omogeneità/disomogeneità* nelle scelte linguistiche per l'espressione del *numero* ci si può rifare agli studi retorici, che distinguono, nelle strategie comunicative, la tendenza a ripetere certe parole e certe strutture dalla tendenza, opposta, a variarle, con ricorso a pseudo-sinonimie e a diverse opzioni sintattiche (Mortara Garavelli, 2020 pp. 185-188). La tendenza particolarmente ricorrente dell'italiano a privilegiare la *variatio* rispetto alla ripetizione e alla simmetria (lessicale, strutturale) si riscontra anche nei testi matematici per la scuola, con possibili conseguenze in termini di decodifica e interpretazione del testo. Con *aderenza* forma-contenuto ci riferiamo invece al risultato concreto della trasposizione linguistica del contenuto matematico: un testo è tanto più *aderente* al contenuto quanto più vi è una rispondenza globale precisa alla realtà extra-testuale cui si riferisce. Ora, sappiamo che un *poligono* presenta più di un *lato*, ma un testo ne parla al singolare; presenta anche più di un *angolo* (lo stesso numero dei lati), ma, questa volta, il testo ne parla al plurale. Il testo è linguisticamente *omogeneo* dal punto di vista del trattamento della numerosità? È *aderente* rispetto al contenuto che si vuole trasporre? Sono questi gli interrogativi su cui focalizzeremo l'attenzione attraverso l'esame di alcuni esempi significativi.

Va infatti considerato che gli enti geometrici che è possibile definire per un poligono sono molteplici: i *lati*, gli *angoli* (*interni* ed *esterni*), i *vertici*, le *altezze*, le *diagonali*, il *contorno*, la *superficie*. In molti casi si tende anche a definire l'ente geometrico *base*, nonostante presenti diverse problematiche dal punto di vista matematico e didattico (Sbaragli, 2012). A questi enti vanno aggiunte poi le grandezze *perimetro* e *area*. Dal punto di vista della numerosità, gli enti geometrici di un poligono presentano caratteristiche non uniformi. In generale, in un *poligono* di n lati si trovano n angoli interni, n vertici, n altezze, n basi, $2n$ angoli esterni (dei quali se ne considerano di solito solo n), e un numero di *diagonali* dato dall'espressione $n \cdot (n - 3) / 2$. Se consideriamo ad esempio un *poligono* di 7 lati, esso avrà dunque 7 angoli interni, 7 vertici, 7 altezze, 7 basi, 14 angoli esterni (dei quali se ne considerano di solito solo 7), 14 diagonali. Inoltre, un qualsiasi poligono ha sempre un solo *contorno* e una sola *superficie*; da quest'ultima constatazione si deduce in particolare che le grandezze *perimetro* e *area*, associate rispettivamente alla lunghezza del contorno del poligono e alla grandezza che caratterizza la superficie del poligono, siano presenti in quantità uguale a uno.

Ora, i manuali scolastici di geometria oggetto dell'analisi solitamente presentano, in una porzione unitaria di testo, diversi elementi del poligono; questo comporta, per ognuno degli enti per cui è possibile farlo, la scelta di utilizzare il singolare o il plurale. Tali scelte possono poi risultare *omogenee* (utilizzo del plurale o utilizzo del singolare per tutti gli enti), o *disomogenee* (utilizzo del singolare per alcuni enti e del

plurale per altri). Per questi motivi, le nostre osservazioni si riferiranno solo a quegli enti per i quali è possibile scegliere di usare sia il singolare sia il plurale.

In questo senso, cercheremo di condurre un'analisi, dal punto di vista dell'*omogeneità* e *disomogeneità* linguistica di *numero*, delle porzioni di testo dei manuali del corpus nei quali vengono definiti gli elementi del poligono. In particolare, osserveremo come le *disomogeneità* di *numero* producano una mancanza di *aderenza* fra la forma linguistica e il contenuto semantico del mondo che si vuol rappresentare.

In particolare, dal punto di vista dell'*omogeneità* e della *disomogeneità di numero* nel definire gli enti di un poligono presenti in numero superiore a uno, le porzioni dei manuali scolastici del corpus DFA-Italmatica sono rientrate nelle seguenti due categorie: *omogenei plurale* e *disomogenei*. Il tipo *omogenei singolare* si è riscontrato solo nei microatti *denominazione*, che non rientrano nella nostra analisi. Vediamo quindi le altre due categorie.

Omogenei plurale. In questa categoria rientrano casi in cui, per tutti gli enti in cui è possibile farlo, si sceglie di utilizzare esclusivamente il plurale, mentre enti come il *contorno* e la *superficie*, e le grandezze *perimetro* e *area* sono ovviamente espresse, qualora si scelga di definirle, al singolare. A questa *omogeneità* corrisponde quindi un'*aderenza* fra numerosità dell'oggetto e numerosità della lingua, pur non potendo esplicitare in tale *definizione* il numero preciso degli elementi. In **Figura 10** (3_4, p. 327) è mostrato un esempio, tratto da un manuale di IV primaria, in cui si definiscono tramite il plurale gli enti *lati*, *vertici*, *angoli interni* e *diagonali*:

- i **lati** sono i segmenti che formano il contorno del poligono;
- i **vertici** sono i punti in cui si incontrano due lati consecutivi;
- gli **angoli interni** sono le parti di piano comprese fra due lati consecutivi;
- le **diagonali** sono i segmenti che uniscono due vertici non consecutivi;
- la **superficie** è la parte di piano racchiusa dai lati.

Fig. 10 – Esempio di utilizzo *omogeneo* del plurale (IV primaria).

Gli enti definiti sono presenti in numero maggiore di uno e la lingua riflette questo stato di cose parlandone sempre al plurale, adottando, inoltre, la struttura sim-

metrica iterata *definiendum*-copula-*definiens*: “i **lati** sono i segmenti...”; “i **vertici** sono i punti” e così via. Questa regolarità morfologica, insieme a quella sintattica, permette al lettore di processare e di associare immediatamente l’informazione considerando la pluralità degli enti: la desinenza stessa dei vari elementi che vengono definiti, per altro evidenziati e colorati in blu chiaro, e gli altri elementi linguistici accordati (come gli articoli) veicolano il fatto che in un poligono esistono più *lati*, *vertici*, *angoli interni* e *diagonali* senza che chi legga debba sforzarsi a operare inferenze implicite. In sostanza, il plurale linguistico rispecchia il plurale reale.

Disomogenei. In questa categoria rientrano casi in cui, nella stessa porzione di testo, si utilizza il plurale per alcuni enti e il singolare per altri, pur trattandosi di enti equinumerosi o comunque presenti nel poligono in quantità maggiore di uno. Dall’osservazione dei testi abbiamo riscontrato due sotto-categorie di analisi:

1. *Disomogeneità* dovuta all’uso del singolare/plurale nel *definiendum* (sottocategoria *Definiendum*).
2. *Disomogeneità* dovuta all’uso di quantificatori nel *definiens* (sotto-categoria *Definiens*).

Definiendum. In questa categoria l’oscillazione nel *numero* è a carico del *definiendum*. Ad esempio, come emerge nel seguente esempio (Fig. 11, 1_3, p. 81), in una stessa porzione di testo si ritrovano i termini “lati”, al plurale, e “angolo” e “vertice” al singolare.

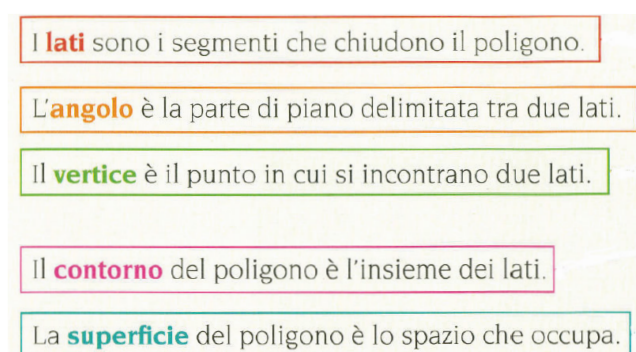


Fig. 11 – *Disomogeneità* dovuta all’uso del singolare/plurale nel *definiendum* (III primaria).

In questo esempio si può osservare l’oscillazione di *numero* nel quadro di una struttura definitoria costante e ripetuta a livello sintattico: *definiendum*-copula-*definiens*. Il *definiendum* è sempre introdotto dall’articolo determinativo, che,

alternando le forme plurale e singolare, contribuisce a generare una semantica ambigua, perché il salto dall'uno all'altro potrebbe generare un elemento di difficoltà: il giovane lettore inizia a ragionare al plurale per gli enti plurali quando si parla di *lati*, mentre poi deve gestire per due volte una struttura singolare che però rimanda comunque a enti plurali, e finire con una corrispondenza singolare per il *contorno* e per la *superficie*. Tale mancata *aderenza* sistematica di *numero* fra la rappresentazione linguistica degli enti matematici e gli enti matematici stessi potrebbe indurre il lettore in fase di apprendimento a credere che in un *poligono* esistano solo un *vertice* e solo un *angolo*, a fronte, invece, di una pluralità di *lati*. Per non cadere in questo falso risultato, il lettore in realtà dovrebbe essere in grado di dedurre in modo autonomo che, poiché in un *poligono* ci sono necessariamente almeno tre *lati*, e poiché l'*angolo* è la parte di piano delimitata tra due di questi, allora in un *poligono* esistono necessariamente più *angoli*. Analogo ragionamento dovrebbe essere effettuato nel caso del *vertice*. È evidente che il carico cognitivo richiesto per ricostruire queste informazioni implicite nel testo è maggiore di quello che verrebbe richiesto se si esplicitasse, anche solo utilizzando la desinenza al plurale, la numerosità degli enti *vertice* e *angolo interno*. In buona sostanza, questa *disomogeneità* pone il lettore davanti a una duplice sfida: districarsi all'interno di una *disomogeneità* di tipo linguistico; effettuare opportune inferenze relative all'ambito geometrico di cui si sta parlando.

Definiens. In questa categoria l'oscillazione nel *numero* è a carico del *definiens*. In particolare rientrano casi in cui si sceglie di utilizzare, nel *definiens* della *definizione* di alcuni elementi del *poligono*, quantificatori indefiniti come *ogni* (di forma indeclinabile al singolare ma con valore plurale), *ognuno*, *ciascun*, ecc. Tali quantificatori inducono a volte concordanze grammaticali al singolare (come nel caso di *ogni* o *ciascun*), altre volte al plurale (come nel caso di *ciascuno dei*), ma indicano comunque a livello semantico una pluralità, una totalità di elementi, di cui si pone all'attenzione l'aspetto moltiplicativo o distributivo (cioè il fatto che gli elementi fanno parte di un insieme); nella stessa porzione di testo, altri elementi vengono invece trattati esclusivamente al singolare. Si tratta, anche in questi casi, di porzioni di testo nelle quali non vi è *aderenza* fra veste linguistica e mondo matematico che si vuol rappresentare.

Nel seguente esempio (Fig. 12, 15_4, p. 297), l'utilizzo del quantificatore *Ciascun* in riferimento al termine "segmento" e al termine "punto" fa pensare alla presenza di un numero di *lati* e *vertici* di cardinalità maggiore di uno. Al contrario, l'assenza di quantificatori indefiniti nei casi dell'*angolo interno* e della *diagonale* (introdotti da articolo: *La parte...; Il segmento...*), non porta il lettore a considerare una pluralità di enti. A queste *disomogeneità* linguistiche si aggiungono ulteriori difformità nel trattare gli enti dal punto di vista simbolico: solo nel caso del *vertice* viene espli-

citata la notazione a lettere maiuscole utilizzata usualmente, facendo riferimento alle cinque lettere A, B, C, D, E; negli altri casi, anche in quello dei *lati*, non viene detto nulla in proposito.

- Ciascun segmento della linea che delimita il poligono si chiama **lato**.
- Ciascun punto in cui la linea cambia direzione si chiama **vertice** e si indica con una lettera maiuscola (A, B, C, D, E). Ci appare come il punto di incontro di due lati.
- La parte di piano delimitata da due lati consecutivi, cioè due lati che hanno un vertice in comune, è un **angolo interno**.
- Il segmento che unisce due vertici non consecutivi si chiama **diagonale**.

Fig. 12– *Disomogeneità* dovuta all'uso di quantificatori (IV primaria).

I rilievi quantitativi del prossimo paragrafo danno la misura della distribuzione del fenomeno nei libri di testo.

6.2.3.3 La distribuzione delle categorie omogenei plurale e disomogenei nei libri di testo

La seguente tabella (Tab. 10) mostra sul piano quantitativo i risultati dell'analisi dei libri di testo del corpus italiano dal punto di vista delle categorie *omogenei plurale* e *disomogenei*:

	Numero di libri	Omogenei plurale		Disomogenei	
		Numero di libri	%	Numero di libri	%
III SP	20	6	30,00%	14	70,00%
IV SP	21	7	33,33%	14	66,67%
V SP	17	8	47,06%	9	52,94%
I SSPG	21	11	52,38%	10	47,62%
Totale	79	32	40,51%	47	59,49%

Tab. 10 – Suddivisione nelle categorie *omogenei plurale* e *disomogenei* dei libri di testo del corpus italiano.

Come emerge dalla tabella, la percentuale di libri del corpus italiano che definiscono gli elementi dei poligoni in modo *omogeneo* dal punto di vista del *numero* (40,51%) è più bassa della percentuale di libri che li trattano in modo *disomogeneo*

(59,49%)²⁶. Più della metà presenta dunque criticità di *aderenza* fra la numerosità degli elementi del poligono espressa in forma linguistica e numerosità reale degli elementi nell'ambito della matematica. Questo dato è significativo perché, nella nostra interpretazione, significa che più della metà dei libri di testo a disposizione opera scelte linguistiche non *aderenti* al mondo matematico, che possono incidere sulla rappresentazione semantica derivata dal testo e, poi, sulla concettualizzazione degli elementi geometrici in gioco.

Nella categoria *omogenei plurale* si nota una tendenza crescente: man mano che aumenta l'anno di scolarità, aumenta anche la percentuale di libri di testo nei quali gli elementi del *poligono* vengono trattati utilizzando, in tutti i casi in cui è possibile farlo, il plurale, passando da un 30% in III primaria (SP) a un 52,38% in I secondaria di primo grado (SSPG). Questa tendenza crescente fa sì che, in modo speculare, nella categoria *disomogenei*, la distribuzione interna presenti una tendenza decrescente: la percentuale di libri in cui gli elementi dei poligoni vengono definiti in modo *disomogeneo* scende da un 70% in III SP a un 47,62% in I SSPG. Se si considera la minore dimestichezza che hanno i bambini più piccoli con la lingua (in generale e scientifica in particolare), con le sue variazioni e con il processo di lettura, la maggior *disomogeneità* nei testi per la III SP è ancor più paradossale e preoccupante.

I rilievi sulla gestione della categoria del *numero* nei manuali scolastici di matematica – e specificamente la considerazione del tratto singolare-plurale nelle definizioni degli elementi del poligono – permettono alcune riflessioni sull'argomento, estendibili più in generale alla veste linguistica dei testi matematici e alle sue implicazioni. In sintesi, potremmo dire che la categoria grammaticale del *numero*, in italiano veicolata dal lessico e dalla morfologia, sembra avere un ruolo non ignorabile nella trasmissione del sapere matematico in gioco; pertanto, le scelte operate dai libri di testo possono non essere ininfluenti nella ricostruzione semantica da parte degli allievi, spesso non ancora completamente pronti a gestire la lettura di testi contenutisticamente complessi, e ricchi di impliciti e di inferenze da elaborare. Dall'analisi condotta emerge in generale come spesso non vi sia sufficiente attenzione, da parte di chi costruisce il libro di testo di geometria, nell'effettuare scelte linguistiche di *numero omogenee* e *aderenti* alla realtà extra-testuale, in questo caso matematica. La maggior parte dei manuali analizzati, infatti, realizza scelte linguistiche *disomogenee* che non sempre sono in sintonia con il contenuto matematico che si vuole esporre.

26. I 47 libri del corpus caratterizzati da *disomogeneità* si distribuiscono equamente fra le due categorie *Definiendum* e *Definiens* (24 *Definiendum* e 23 *Definiens*), mostrando una preferenza per il tipo *Definiens* in IV primaria (10 libri) e *Definiendum* in I secondaria di primo grado (10 libri).

6.2.4 Per concludere: le difficoltà degli allievi nel definire in matematica

Pur essendo l'insegnamento della matematica particolarmente incentrato sull'atto del definire – ne sono testimonianza le numerose *definizioni* presenti nei libri di testo scolastici di matematica fin dalla scuola primaria – non risulta semplice per gli allievi diventare competenti in questa azione, che è al contempo cognitiva, linguistica e matematica. Come si è visto, i testi non sono sempre efficaci nel proporre questo tipo di enunciato, che si mostra difficile da affrontare sin dai primi anni di scolarità e permane come scoglio anche negli anni successivi.

In una ricerca condotta in Canton Ticino su 440 allievi all'ingresso della scuola secondaria di primo grado sono emerse diffuse difficoltà, che hanno messo in evidenza la complessità di tale formato linguistico per gli apprendenti. Alla richiesta di scrivere una *definizione* di *quadrilatero*, solo il 29,1% degli allievi ha risposto in modo corretto. In questa percentuale rientrano anche coloro che non hanno rispettato la caratteristica della definizione matematica enucleata già da Aristotele, di non essere *ridondante* (20,2% degli allievi la fornisce *ridondante*). Tale tratto è distante dalla prassi degli studenti, più propensi e abituati a descrivere la realtà che li circonda in modo sovrabbondante, mossi dall'esigenza di rafforzare ciò che vogliono far percepire all'interlocutore. Alcuni protocolli risultano ridondanti nell'esplicitazione di che cos'è un quadrilatero (questi allievi ricorrono alla copula *essere* nelle loro *definizioni*), altri nel presentarne le caratteristiche (questi introducono *avere*). Ad esempio, la definizione di un allievo

(1) Una figura geometrica che è un poligono con 4 lati.

risulta *ridondante* nell'attribuzione ontologica (verbo *essere*) di che cos'è un *quadrilatero*, in quanto per parlare di un *quadrilatero* bastavano i termini "figura geometrica" o "poligono". Invece, il seguente caso risulta *ridondante* nell'elencazione delle caratteristiche che un *quadrilatero* ha (introdotta da *con*):

(2) Un quadrilatero è un poligono con 4 lati e 4 angoli.

Sarebbe stato, infatti, matematicamente sufficiente dire 4 *lati* oppure 4 *angoli*. Eppure, sono gli stessi libri di testo a proporre agli allievi svariati esempi di *definizioni ridondanti* in questo senso, in cui a volte le caratteristiche non necessarie elencate sono anche più numerose che nelle *definizioni* degli allievi (si veda il par. 6.2.2.2).

Altri protocolli risultano *ridondanti* sia sul piano ontologico (*essere*) sia su quello componenziale (*avere*), come l'esempio (3):

(3) Una figura che ha 4 lati e 4 angoli ed è un poligono.

Tra coloro che sbagliano a formulare la *definizione* di *quadrilatero* (41,8%), la maggioranza fornisce informazione scorrette (29,3%), come ad esempio

(4) Una forma con quattro lati tutti uguali.

oppure incomplete (11,4%). La maggior parte di questi ultimi trascurava il verbo *essere*, passando direttamente alle caratteristiche delle figure (*con 4 lati*) senza ricondurle a una categoria generale nota; altri, invece, sorvolano sulle caratteristiche identificative che lo rendono peculiare nell'insieme dei poligoni:

(5) Il quadrilatero è una forma geometrica, un poligono.

Altri ancora risultano *esemplificativi*, ma non definitivi, seguendo una tendenza tipica e naturale anche nei bambini più piccoli:

(6) Un quadrilatero può essere un rombo, un romboide, un quadrato e un rettangolo. I quadrilateri sono una famiglia geometrica.

Gli stessi principali tipi di errore ritornano anche in altri item relativi alla *definizione*, con percentuali anche maggiori, soprattutto quando la richiesta si complica come nel seguente caso

Daniele ha scritto sul quaderno questa definizione di quadrato: "un quadrato è un quadrilatero con quattro lati della stessa lunghezza e quattro angoli della stessa ampiezza". La maestra Monica gli dice: "Ci sono tante definizioni di quadrato!". Aiuta Daniele a trovarne almeno un'altra, e scrivila.

In questo quesito solo il 9,5% degli allievi ha risposto in modo corretto, il 68,7% ha sbagliato, il 19,5% ha lasciato in bianco e il 2,3% ha esplicitato di non saper rispondere.

Le difficoltà degli allievi, qui brevemente riassunte, mettono in evidenza la complessità nel saper formulare in forma scritta tale atto linguistico. Pur essendo sottoposti al confronto con questo genere di enunciati fin dai primi anni di scolarizzazione, non risulta per loro facile impossessarsene: le nostre analisi hanno confermato che la manualistica non è sempre d'aiuto nel ridurre tali difficoltà, né lo è nel proporre ai docenti un quadro chiaro e coerente. Nel migliore dei casi, il costo cognitivo dell'operazione definitoria rischia di essere molto alto per gli allievi, specialmente per i più giovani; nel peggiore, alla difficoltà (che potrebbe anche essere legittima) si accompagna una mancanza di senso e di strumenti metacognitivi di controllo sull'operazione definitoria. Per questa ragione occorre prevedere da parte

dei docenti un lavoro profondo, specifico e attento su questo tipo di enunciato mettendone in evidenza in modo esplicito le caratteristiche, gli aspetti necessari e quelli che, invece, in matematica non lo sono, mentre potrebbero andare bene nel “definire” semantico lessicografico oppure nel senso comune di definire come descrivere per farsi capire. Riflettere su queste differenze e sperimentarle gradualmente potrebbe portare a notevoli benefici in termini di riflessione matematica, di appropriazione delle caratteristiche del linguaggio disciplinare e di sviluppo delle competenze linguistiche globali.

Le azioni didattiche che possono partire dal testo di matematica sono moltissime: si possono far osservare e commentare, a gruppi, alcune *definizioni*, magari mettendone a confronto qualcuna diversa come struttura ed elementi, sentendo che cosa emerge dai bambini e dai ragazzi dapprima spontaneamente; si può chiedere loro di scegliere la *definizione* che preferiscono, motivando il perché, per poi passare a un’osservazione critica sul piano matematico (è davvero la migliore? Quali caratteristiche dovrebbe avere?); si può lavorare sulla riformulazione e si possono anche produrre ulteriori *definizioni* (quante? Come? Vanno tutte bene?) per mettere in evidenza come anche a piccoli cambiamenti possano corrispondere ambiguità e scorrettezze matematiche; e si può prendere spunto dalle *disomogeneità di numero* qui illustrate per sfidare allieve e allievi a coglierle.

6.3 Usi interpuntivi nel testo di matematica

L’analisi informativo-testuale condotta al **paragrafo 5.4** ha portato all’attenzione alcuni fenomeni notevoli che coinvolgono in maniera significativa anche gli *usi interpuntivi*. Come si è visto, alcuni di questi fenomeni sono all’origine di possibili problematicità. In questo paragrafo si intende approfondire l’analisi degli *usi interpuntivi* al duplice scopo di verificare da un lato se esiste una corrispondenza tra questi usi e gli usi problematici della punteggiatura riscontrati nella scrittura di oggi in generale e noti in letteratura, dall’altro se questi usi possono appunto creare problemi di comprensione del testo matematico e dei concetti che esso veicola.

6.3.1 Le problematicità interpuntive nella scrittura di oggi

Gli studi che indagano l’uso della punteggiatura nella scrittura di oggi (come Antonelli, 2008; A. Ferrari, 2003; 2004b; Fornara, 2010a; 2010b) concordano nell’individuare alcuni nodi di criticità ricorrenti, che in molti casi si presentano già nelle prime fasi dell’apprendimento della composizione scritta (Demartini & Fornara, 2013) e che permangono nella scrittura degli adulti. In assoluto, il segno che si rivela più problematico è senza dubbio la virgola (sulla quale si vedano A. Ferrari, 2004a; 2018; Tonani, 2011), per la vasta gamma di costrutti sintattici che permette

di identificare: per separare gli elementi di un elenco, per marcare l'inizio e la fine degli incisi, per sottolineare i rapporti di coordinazione, di giustapposizione e soprattutto di subordinazione tra le frasi. La sua complessità, dunque, giustifica i problemi che la sua gestione provoca nella scrittura degli apprendenti e anche in quella degli adulti; problemi che si annidano proprio attorno ai costrutti sintattici appena ricordati: fra i tratti più frequenti, segnaliamo l'utilizzo della virgola al posto di segni più forti, come i due punti, il punto e virgola e il punto²⁷, con conseguente appiattimento delle gerarchie testuali; la presenza della virgola a spezzare la sintassi, come tra soggetto e predicato o tra predicato e complemento oggetto; l'assenza della virgola di chiusura o di apertura di un inciso. Altri segni sono all'origine di possibili problematicità, anche se con frequenza decisamente minore, soprattutto perché lo scrivente che sente di non padroneggiarli a dovere tende generalmente a evitarli, come avviene soprattutto con il punto e virgola; con i due punti, invece, lo scrittore inesperto tende a sovraestenderne l'uso a tutte le elencazioni, anche quando in realtà sarebbe superfluo (se non addirittura errato dal punto di vista grammaticale). Per la rilevanza e la frequenza della struttura sintattico-testuale dell'elenco nel testo matematico, sarà particolarmente interessante verificarne la gestione a livello interpuntivo nei testi del corpus: come vedremo, infatti, la varietà di soluzioni è molto ampia e contempla anche gli usi problematici che si trovano nella scrittura degli apprendenti.

Prenderemo ora in considerazione proprio i segni e gli usi appena ricordati nel corpus di testi di matematica, per verificarne la presenza e il grado di problematicità, a partire dalla virgola usata al posto di segni più forti. L'analisi verrà condotta da un punto di vista qualitativo, dunque senza rilievi di natura statistica, in ragione del fatto che le occorrenze di usi problematici sono complessivamente ridotte, cioè convivono con scelte interpuntive standard e accettabili, che sono la netta maggioranza, probabilmente in virtù del fatto che gli enunciati matematici hanno una natura compatta, essenziale e non ridondante, che richiede un uso standard e piuttosto fisso dei segni di punteggiatura.

6.3.2 La virgola al posto di segni più forti

Il tratto che abbiamo definito più problematico nella scrittura di oggi, relativamente all'uso dei segni di interpunzione, è presente anche nel corpus DFA-Italmatica, distribuito in maniera tutto sommato equilibrata nei testi destinati ai diversi anni di scolarità. La problematicità riscontrata presenta un'escursione di livello molto forte: si parte infatti da esempi in cui l'uso della virgola non crea ambiguità a

27. Si tratta del fenomeno della cosiddetta *comma splice* o virgola "tuttofare", su cui Corno, 2019; Demartini, 2019; Demartini e Ferrari, 2019; Ferrari, 2017.

livello di gerarchizzazione dei contenuti, per arrivare ad altri in cui la sua presenza contribuisce ad appiattire le gerarchie stesse, dando luogo a possibili incomprensioni. Tra i casi meno problematici ci sono i seguenti:

(1) Le linee hanno una sola dimensione, la lunghezza. (1_3, p. 75)

(2) Queste matite sono rigide, non si piegano. (2_2, p. 73)

I due esempi rappresentano dei casi-limite, in cui la virgola è un segno del tutto lecito e accettabile, anche se una riformulazione con un connettivo o con i due punti potrebbe rendere ancora più chiaro il nesso logico tra ciò che precede e ciò che segue la virgola, soprattutto nel primo caso:

(1a) Le linee hanno una sola dimensione, cioè la lunghezza.

(1b) Le linee hanno una sola dimensione: la lunghezza.

Ancora più esplicita dal punto di vista matematico potrebbe essere una riformulazione che chiarisce la connessione tra la seconda parte della frase e la prima:

(1c) Le linee hanno una sola dimensione che corrisponde alla lunghezza.

Più delicati i casi in cui la virgola non permette da sola di porre in evidenza il rapporto di significato tra le due parti dell'enunciato, poiché le colloca sullo stesso piano, giustapponendole:

(3) Calcola il perimetro dei poligoni, usa come unità di misura il lato del quadrato. (6_3, p. 86)

(4) Calcola la misura dell'area di ogni poligono, utilizza come unità di misura il quadrato. (14_2, p. 99)

In entrambi i casi la specificazione che segue la virgola può esser resa più esplicita attraverso la riformulazione della forma verbale che la introduce:

(3a) Calcola il perimetro dei poligoni, usando come unità di misura il lato del quadrato.

(4a) Calcola la misura dell'area di ogni poligono, utilizzando come unità di misura il quadrato.

Questa soluzione risulta tutto sommato più adeguata ed efficace a livello comunicativo rispetto all'alternativa rappresentata da un segno più forte, come i due punti:

(3b) Calcola il perimetro dei poligoni: usa come unità di misura il lato del quadretto.

(4b) Calcola la misura dell'area di ogni poligono: utilizza come unità di misura il quadrato.

L'appiattimento della gerarchia informativa è particolarmente marcato quando le due parti dell'enunciato differiscono per carico di significato in maniera più rilevante. Si veda l'esempio seguente, in cui la seconda parte dell'enunciato ha un contenuto informativo importante a livello definitorio che l'uso della virgola non mette in evidenza:

(5) La piega della carta è la metà esatta della figura, è l'asse di simmetria. (8_4, p. 103)

Il problema, in questo caso, non è dato solo dalla presenza della virgola, ma soprattutto da una formulazione infelice dal punto di vista matematico. È comunque possibile rendere più chiaro l'enunciato attraverso una riformulazione senza punteggiatura, come questa:

(5a) La piega della carta che corrisponde alla metà esatta della figura è l'asse di simmetria.

Un caso simile è anche il seguente:

(6) I due poligoni sovrapposti coincidono perfettamente, diciamo che sono **congruenti**.

I due poligoni sovrapposti non coincidono perfettamente, **non sono congruenti**. (9_6, p. 149)

La riformulazione senza punteggiatura permetterebbe di ottenere una maggiore chiarezza informativa, grazie a una gerarchizzazione più efficace:

(6a) I due poligoni sovrapposti che coincidono perfettamente sono congruenti.
I due poligoni sovrapposti che non coincidono perfettamente non sono congruenti.

L'introduzione di *quindi* o di un altro connettivo come *perciò* o *pertanto* sembra invece la soluzione migliore nel seguente caso, in cui la virgola è insufficiente per rendere il rapporto logico che lega le due parti dell'enunciato:

(7) Il procedimento attraverso il quale si arriva alla formula è laborioso, limitiamoci a formularla per poterla applicare. (9_7, p. 66).

(7a) Il procedimento attraverso il quale si arriva alla formula è laborioso, quindi/perciò/pertanto limitiamoci a formularla per poterla applicare.

L'esempio successivo è invece decisamente mal costruito dal punto di vista linguistico, perché combina all'uso della virgola tuttofare una formulazione incerta:

(8) Per calcolare l'area degli altri poligoni è facile, basta trasformarli in un rettangolo equiesteso. (17_5, p. 341)

Per sistemarlo, è necessaria infatti una riformulazione anche nella sua parte iniziale, oltre che in corrispondenza della virgola, che può essere sostituita dai due punti. Ecco una possibile soluzione più efficace in ottica comunicativa:

(8a) Calcolare l'area degli altri poligoni è facile: basta trasformarli in un rettangolo equiesteso.

A ben guardare, il commento sulla facilità del calcolo si può anche eliminare, lasciandolo nell'implicito, a vantaggio di una maggior immediatezza e semplicità:

(8b) Per calcolare l'area degli altri poligoni basta trasformarli in un rettangolo equiesteso.

La virgola può originare qualche ambiguità procedurale in un'altra indicazione di natura prescrittiva come questa:

(9) Punta il compasso in D, con una apertura uguale al raggio, descrivi un arco che intersechi la circonferenza nei punti C ed E. (3_5, p. 329)

L'unità informativa centrale, infatti, con le due virgole può legarsi sia all'unità informativa che la precede, sia a quella che segue. La soluzione più efficace è probabilmente quella che prevede la sostituzione della prima virgola con un punto e virgola:

- (9a) Punta il compasso in D; con una apertura uguale al raggio, descrivi un arco che intersechi la circonferenza nei punti C ed E.

Vi sono poi alcuni esempi in cui la virgola compare all'interno di elencazioni più o meno lunghe in modo tale da creare possibili ambiguità sul numero effettivo degli elementi elencati. Si veda questo caso:

- (10) In ogni poligono possiamo distinguere:
- i lati, i segmenti che formano la linea spezzata;
 - i vertici, i punti d'incontro dei lati;
 - le diagonali, i segmenti che uniscono due vertici non consecutivi;
 - gli angoli, le parti di piano delimitate da due lati consecutivi;
 - le altezze, sono distanze che possono essere rappresentate con segmenti che uniscono perpendicolarmente un vertice al lato opposto;
 - il perimetro, la misura del contorno, ovvero la somma di tutti i lati che lo compongono;
 - l'area, la misura della superficie delimitata dal perimetro.
- (6_5, p. 317)

Per comprendere bene l'elenco, il lettore deve sapere già qual è il significato di un numero rilevante di tecnicismi, cioè *segmenti*, *punti*, *consecutivi*, *piano* ecc. Solo conoscendoli, infatti, può interpretare correttamente i singoli elementi dell'elenco, che sono in prevalenza costruiti con la sequenza *a* [cioè] *b* con il nesso esplicativo *cioè* implicito (ad esempio "i lati, [cioè] i segmenti che formano la linea spezzata" oppure "i vertici, [cioè] i punti d'incontro dei lati"). In caso contrario, il lettore potrebbe interpretare la virgola con un valore seriale, attribuendole lo stesso peso che avrebbe la congiunzione *e* (ad esempio, "i lati e i segmenti che formano la linea spezzata"). L'ambiguità è ancora maggiore perché non tutti gli elementi dell'elenco sono costruiti allo stesso modo: si veda il quinto, che dopo la virgola introduce la forma verbale *sono* ("le altezze, sono distanze...") e si veda il sesto, nel quale l'informazione inserita tra due virgole è seguita da un'altra specificazione, introdotta da *ovvero* ("il perimetro, la misura del contorno, ovvero..."); in questi due elementi, il valore della virgola appare diverso rispetto ai precedenti, e dunque può causare dubbi a livello interpretativo. Dunque la sola virgola, in casi come questi, non appare la soluzione migliore, e le ambiguità possono essere risolte in più modi, sia attraverso l'aggiunta di formule di connessione (10a), sia attraverso la sostituzione della virgola con l'introduzione delle parentesi (10b). Ecco due possibili alternative:

- (10a) In ogni poligono possiamo distinguere:
- i lati, cioè i segmenti che formano la linea spezzata;

- i vertici, cioè i punti d'incontro dei lati;
- le diagonali, cioè i segmenti che uniscono due vertici non consecutivi;
- gli angoli, cioè le parti di piano delimitate da due lati consecutivi;
- le altezze, cioè le distanze che possono essere rappresentate con segmenti che uniscono perpendicolarmente un vertice al lato opposto;
- il perimetro, cioè la misura del contorno, ovvero la somma di tutti i lati che lo compongono;
- l'area, cioè la misura della superficie delimitata dal perimetro.

(10b) In ogni poligono possiamo distinguere:

- i lati (i segmenti che formano la linea spezzata);
- i vertici (i punti d'incontro dei lati);
- le diagonali (i segmenti che uniscono due vertici non consecutivi);
- gli angoli (le parti di piano delimitate da due lati consecutivi);
- le altezze (sono distanze che possono essere rappresentate con segmenti che uniscono perpendicolarmente un vertice al lato opposto);
- il perimetro (la misura del contorno, ovvero la somma di tutti i lati che lo compongono);
- l'area (la misura della superficie delimitata dal perimetro).

Un problema di entità meno rilevante, ma sempre legato all'elenco, si trova nell'esempio (11), in cui l'ultimo elemento ha al suo interno una virgola che può compromettere la chiarezza dell'enunciato:

- (11) Il quadrato ha 4 lati, 4 angoli e 4 vertici;
 i lati sono congruenti;
 i lati opposti sono paralleli;
 gli angoli sono congruenti, sono tutti retti. (3_4, p. 334)

Per togliere l'ambiguità, sembra in questo caso indispensabile l'aggiunta di un nesso chiarificatore:

- (11a) (...)
 gli angoli sono congruenti, dato che sono/essendo tutti retti.

Per la sua rilevanza numerica all'interno dei testi di matematica, il costrutto dell'elenco merita un discorso a sé, che affronteremo nel **paragrafo 6.3.5**.

La cosiddetta virgola *splice* può provocare ambiguità sul numero degli elementi anche in elenchi brevi come il seguente:

- (12) La classe 2A ha realizzato due bandiere, una per la squadra di calcio, l'altra per quella di pallavolo. Le due bandiere sono congruenti? (1_7, p. 220)

L'ambiguità si risolve leggendo la frase interrogativa che segue l'elenco ("Le due bandiere sono congruenti?"), oppure sostituendo la prima virgola con i due punti:

- (12a) La classe 2A ha realizzato due bandiere: una per la squadra di calcio, l'altra per quella di pallavolo. Le due bandiere sono congruenti?

Analoga situazione anche in (13), con l'alternativa dei due punti esemplificata da un altro testo del corpus (14) che, trattando lo stesso argomento, risulta di conseguenza più chiaro e per nulla ambiguo:

- (13) Ogni spezzata semplice chiusa divide il piano in due parti, una interna finita e una esterna infinita. (8_6, p. 115)

- (14) Una spezzata chiusa divide il piano in due parti: una interna limitata ed una esterna illimitata. (c2_6, p. 112)

6.3.3 La virgola tra soggetto e predicato

Benché non abbia le stesse implicazioni a livello di gerarchizzazione delle informazioni e, di conseguenza, non comporti ricadute sul piano della comprensione, un altro dei tratti tipici della scrittura di oggi – che non è azzardato considerare nella maggior parte dei casi un errore – è presente anche nel corpus DFA-Italmatica: si tratta della presenza della virgola a spezzare la sintassi laddove non esiste stacco tra l'elemento che precede e quello che segue. Il caso più frequente è senza dubbio la virgola tra soggetto e predicato, come mostrano questi esempi, nei quali la pesantezza sintattica del soggetto, che è uno dei motivi per i quali l'uso della virgola che spezza la sintassi è così diffuso²⁸, non appare così significativa da giustificare la presenza del segno di punteggiatura:

- (1) In un poligono il numero dei **lati**, è uguale a quello degli **angoli** e dei **vertici**. (10_4, p. 317)
- (2) L'altezza *AH* relativa al lato *BC*, è interna al triangolo, le altezze *BK* e *CL* relative ai lati *CA* e *AB*, sono esterne al triangolo *ABC*: l'ortocentro *O* risulta quindi esterno al triangolo stesso. (8_6, p. 149)

²⁸ Sui motivi che sembrano giustificare la presenza della virgola a interrompere la continuità sintattica tra soggetto e predicato si veda Mortara Garavelli (2005, pp. 83-92).

(3) Due triangoli rettangoli che hanno i **due cateti congruenti**, sono congruenti. (10_6, p. 233)

(4) Le misure delle diagonali minore e maggiore corrispondono rispettivamente, alle misure della base e dell'altezza del rettangolo. (8_5, p. 95)

In (4) la presenza della virgola può essere dovuta all'introduzione dell'avverbio *rispettivamente*, che per il suo valore di inciso avrebbe potuto essere racchiuso tra due virgole (ma la resa della continuità sintattica si può ripristinare anche togliendo l'unica virgola presente). Anche in (5) la spiegazione è simile:

(5) Come puoi vedere nella tabella, ovviamente il rapporto tra lato e apotema e quindi il numero fisso, è diverso per ciascun tipo di poligono. (c3_5, p. 325)

Infatti, la specificazione *e quindi il numero fisso* richiederebbe le due virgole di apertura e di chiusura o la cancellazione dell'unica virgola presente.

La pesantezza sintattica del soggetto come motivo che spiega la presenza della virgola appare evidente in quest'altro esempio:

(6) I poligoni che hanno tutti i lati e tutti gli angoli congruenti e il numero di assi di simmetria uguale al numero dei lati, sono detti **poligoni regolari**. (3_5, p. 327)

Vi sono poi dei casi in cui la virgola spezza la sintassi in maniera differente, come nell'esempio (7), in cui invece di comparire all'inizio della subordinata consecutiva introdotta da *quindi* figura dopo la congiunzione stessa, e come nell'esempio (8), in cui la virgola compare dopo la congiunzione che, la quale introduce una subordinata completiva²⁹:

(7) Il triangolo è scaleno quindi, ha tutti i lati diversi (7_4, p. 273)

(8) Dalla definizione di area del quadrato deriva il fatto che, **elevare alla seconda** si dice anche **elevare al quadrato**. (10_7, p. 78)

6.3.4 Altri usi problematici della virgola

L'analisi condotta al **paragrafo 5.4** ha individuato alcuni altri usi interpuntivi chiaramente discutibili in rapporto al contenuto informativo disciplinare degli enunciati

²⁹. Con il termine di *subordinate complete* si intendono le subordinate oggettive e le subordinate soggettive.

del testo matematico. Ad esempio, ha segnalato la superfluità della virgola in casi come (1), in cui il sintagma *o mista* racchiuso incidentalmente tra due virgole può far pensare che l'aggettivo *chiusa* si riferisca solo a *linea curva* e non anche a *mista*, cosa che dal punto di vista matematico sarebbe sbagliata:

- (1) Le figure che hanno come contorno una linea curva, o mista, chiusa si chiamano non poligoni. (c4_2, p. 63)

La chiarezza comunicativa si ripristina togliendo entrambe le virgole e riformulando:

- (1a) Le figure che hanno come contorno una linea curva chiusa o una linea mista chiusa si chiamano non poligoni.

Virgola in eccesso anche in (2), dopo *per esempio*, che, racchiuso tra due virgole, può far pensare a un suo valore testuale riferito all'intera unità informativa introdotta da *ma* ("per esempio devi trovare un'unità di misura adatta") e non solo a ciò che segue, cioè *un quadratino*, come dovrebbe essere ("il quadratino è un esempio di unità di misura adatta"):

- (2) La superficie ha due dimensioni, quindi per misurarla non puoi usare un'unità di misura con una sola dimensione, ma devi trovare un'unità di misura adatta, per esempio, un quadratino. (3_3, p. 74)

A conferma di questa interpretazione lo stesso concetto viene espresso senza virgola in un altro testo (*per esempio il quadretto*):

- (3) L'area è la misura della superficie di un poligono. Si indica con la lettera A e si misura usando un'unità di superficie, per esempio il quadretto. (9_3, p. 103)

Un altro degli errori frequenti nella scrittura di oggi relativo alla virgola (cioè l'assenza di una delle due virgole che marcano l'inciso, e nello specifico di quella di chiusura) è poco rappresentato nel corpus DFA-Italmatica; eccone un'occorrenza, in cui dopo *al punto 8* manca la virgola:

- (4) Ripeti le fasi descritte nel laboratorio, dal punto 2 al punto 8 e ottieni un ottagono. (1_5, p. 324)

6.3.5 I due punti e gli elenchi

Come chiarito in apertura, dopo la virgola, l'altro segno all'origine di usi incerti della punteggiatura sono i due punti (sui quali si veda Stojmenova Weber, 2018), che coprono una pluralità di funzioni piuttosto ampia, a partire da quella più standard di introduzione degli elenchi a tutte le sfumature legate al loro valore comunicativo-testuale (che può essere ad esempio presentativo, esplicativo o consecutivo). Questi ultimi usi, essendo meno facilmente codificabili, sono anche quelli che creano più incertezze negli scriventi di diverse fasce di età. Il testo matematico non fa eccezione, come mostrano i seguenti esempi, tutti legati a indicazioni operative fornite al lettore:

- (1) Ripassa di rosso il contorno del rettangolo. Poi misura la lunghezza del contorno: conta da quanti lati di quadretto è formato. (3_2, p. 83)
- (2) Colora con la stessa tinta i listelli che hai usato per costruire poligoni che hanno la stessa lunghezza: conta i buchini. (3_2, p. 83)
- (3) Calcola il perimetro: misura con il righello la misura di ogni lato. (3_3, p. 73)

Le formulazioni appaiono in generale troppo implicite, e l'uso dei due punti contribuisce a conferire quest'impressione. Per capire bene le consegne che vengono richieste, una regola da sempre nota nel campo dell'educazione e della formazione è che queste siano esplicite al massimo livello e non interpretabili. In (1) e (2), ad esempio, non è immediata la ricostruzione della procedura richiesta nei passaggi collegati dai due punti. In (1) l'indicazione "conta da quanti lati di quadretto è formato" dovrebbe essere la modalità per misurare la lunghezza del contorno, ma i due punti potrebbero far pensare a una successione procedurale cronologica ("prima misura la lunghezza del contorno, poi conta da quanti lati di quadretto è formato"); esplicitando il nesso logico ad esempio con l'uso della virgola seguita dal gerundio, i dubbi non ci sono più:

- (1a) Ripassa di rosso il contorno del rettangolo. Poi misura la lunghezza del contorno, contando da quanti lati di quadretto è formato.

In (2), invece, la lunghezza della prima parte dell'enunciato suggerisce un'altra possibile soluzione, che metta all'opposto in rilievo la successione cronologica delle operazioni richieste, come questa:

- (2a) Colora con la stessa tinta i listelli che hai usato per costruire poligoni che hanno la stessa lunghezza; poi conta i buchini.

Anche (3), simile a (1), ma con in più l'infelice ripetizione "misura la misura", si può rendere più efficace attraverso una riformulazione di questo tipo:

(3a) Calcola il perimetro, misurando con il righello la lunghezza di ogni lato.

Oppure

(3b) Per calcolare il perimetro, misura con il righello la lunghezza di ogni lato.

L'indicazione andrebbe comunque completata chiarendo che le lunghezze di ciascun lato andrebbero sommate tra loro, altrimenti la procedura "per calcolare il perimetro" non è completa. Anche nel caso seguente la procedura risulta poco chiara, perché i passaggi che la costituiscono non sono collocati allo stesso livello gerarchico:

(4) Disegniamo tre poligoni: un pentagono, un quadrilatero e un triangolo e tracciamo tutte le loro diagonali. (8_6, p. 118)

L'unità informativa "tracciamo tutte le loro diagonali" si pone a livello di gerarchia sullo stesso piano di "Disegniamo tre poligoni", anche se cronologicamente indica una fase successiva; nella formulazione del libro, invece, essendo posizionata dopo i due punti, si realizza allo stesso livello dell'elenco di poligoni ("un pentagono, un quadrilatero e un triangolo"), dando luogo così a un cortocircuito di significato. Meglio una soluzione come questa:

(4a) Disegniamo un pentagono, un quadrilatero e un triangolo e tracciamo tutte le loro diagonali.

I due punti sono superflui anche nell'esempio seguente, in cui la presenza di *cioè* ne costituisce una sorta di doppione, eliminabile con il ricorso alla virgola:

(5) Se consideri come unità di misura il lato di un quadretto (-) puoi calcolare il perimetro. Se invece vuoi calcolare la misura della parte di piano che il poligono occupa, cioè la misura della superficie azzurra, occorre una unità di misura adatta: cioè un quadratino. (17_3, p. 92)

Abbiamo chiarito che questi usi dei due punti si rifanno alla loro funzione testuale e che per questo, non essendo essa così facilmente codificabile, le incertezze sono per lo meno spiegabili. Sorprende invece che vi siano ancora più usi incerti e a volte oscillanti (persino all'interno dello stesso libro) con i due punti a introdurre

l'elenco, cioè una struttura sintattico-testuale per la quale è possibile identificare agevolmente uno o più usi standard codificati (variabili a seconda che si tratti di elenchi scritti nel *continuum* del testo, o di elenchi puntati o numerati). Vediamo dapprima una rassegna di soluzioni differenti tratte dal corpus relativamente agli elenchi puntati:

(6) Le tre dimensioni sono:

lunghezza

larghezza

altezza

(6_3, p. 78)

(7) In ogni poligono vi sono:

- i **lati**; i segmenti della linea spezzata chiusa,
- i **vertici**; i punti di incontro dei lati,
- gli **angoli**; le parti di piano delimitate da due lati consecutivi,
- le **altezze**; i segmenti che uniscono perpendicolarmente un vertice al lato opposto,
- la **superficie**; la parte di piano delimitata dal perimetro. (7_5, p. 268)

(8) In base ai lati obliqui i trapezi si distinguono a loro volta in:

trapezi scaleni, i lati obliqui hanno lunghezze diverse

trapezi isosceli, i lati obliqui hanno la stessa lunghezza

trapezi rettangoli, hanno due angoli retti. (4_7, p. 18)

(9) Gli elementi che caratterizzano i poligoni sono:

- Il **vertice** è il punto in cui si incontrano due lati consecutivi.
 - Il **lato** è ciascun segmento che forma il contorno del poligono.
 - L'**angolo** interno è la parte del poligono delimitata da due lati consecutivi.
 - La **diagonale** è il segmento che unisce due vertici non consecutivi (non vicini).
 - L'**altezza** è il segmento perpendicolare che unisce un vertice al lato opposto.
- (9_4, p. 359)

(10) Gli elementi che lo costituiscono sono:

- il lato (CB) su cui poggia il triangolo si chiama **base** (b).
- il segmento perpendicolare che unisce il vertice opposto alla base (AH) si chiama **altezza** (h). (17_4, p. 323)

(11) L'obiettivo è conquistare i punti del piano cartesiano, nel seguente modo:

- I giocatori lanciano a turno il dado per due volte.

- Il primo numero indica la coordinata *x* del punto, il secondo numero indica la coordinata *y*.
 - Se il punto è già occupato, il turno passa all'altro giocatore.
- (4_6, p. 48)

Come si nota, nessuno degli esempi precedenti rispetta appieno la convenzione paragrafematica standard dell'elenco puntato, che, applicandola all'esempio (11), dovrebbe essere la seguente:

- (11a) L'obiettivo è conquistare i punti del piano cartesiano, nel seguente modo:
- i giocatori lanciano a turno il dado per due volte;
 - il primo numero indica la coordinata *x* del punto, il secondo numero indica la coordinata *y*;
 - se il punto è già occupato, il turno passa all'altro giocatore.

Negli esempi sopra riportati si alternano infatti usi non propriamente corretti delle maiuscole e della punteggiatura che segna la fine degli elementi dell'elenco; a volte, poi, come in (7) e (8), anche i segni interpuntivi interni agli elementi dell'elenco non sono gestiti in maniera ottimale e possono portare a problemi di interpretazione sul numero effettivo degli elementi elencati. Soprattutto in questi ultimi casi non si tratta, quindi, solo di una questione formale o stilistica, ma anche di chiarezza comunicativa. L'impressione generale è che l'esigenza di classificare e di rendere molto sistematica la trattazione si traduca a volte in un eccesso elencatorio, che porta a costruire elenchi (soprattutto puntati) laddove se ne potrebbe anche fare a meno, oppure laddove l'elenco puntato potrebbe essere sostituito da un'analogica struttura discorsiva. Si veda, a mero titolo esemplificativo, questo caso:

- (12) Pertanto, per trasformare una misura di superficie, espressa in una certa unità, in un'altra di ordine:
- a. **inferiore**, si procede verso *destra* e si *moltiplica* la misura data ogni volta per 100, a seconda di quante posizioni (nella tabella) separano le due unità;
 - b. **superiore**, si procede verso *sinistra* e si *divide* la misura data ogni volta per 100, a seconda di quante posizioni (nella tabella) separano le due unità.
- (1_7, p. 224)

Una valida alternativa discorsiva potrebbe essere la seguente:

- (12a) Pertanto, per trasformare una misura di superficie, espressa in una certa unità, in un'altra di ordine **inferiore**, si procede verso *destra* e si *moltiplica*

la misura data ogni volta per 100, a seconda di quante posizioni (nella tabella) separano le due unità; mentre per trasformarla in un'altra di ordine **superiore**, si procede verso *sinistra* e si *divide* la misura data ogni volta per 100, a seconda di quante posizioni (nella tabella) separano le due unità.

Va comunque segnalato che anche quando si opta per elenchi non puntati, ma scritti di seguito nel *continuum* del testo, a volte si riscontra un effetto molto simile a quello della virgola tra soggetto e predicato, o tra predicato e complemento oggetto o subordinata completiva, come in (13), a causa dei due punti, la cui presenza appare decisamente superflua:

(13) La **base** è un lato del poligono. "Base" si abbrevia con: **b.** (7_4, p. 287)

(14) Il simbolo del metro quadrato è: **m².** (7_5, p. 269)

(15) Rispetto ai lati, il triangolo può essere: **scaleno, isoscele, equilatero.** (8_4, p. 99)

(16) I trapezi isosceli hanno: i lati obliqui, le loro proiezioni sulla base maggiore, gli angoli adiacenti a ciascuna base e le diagonali congruenti. (10_6, p. 294)

(17) Con il secondo criterio di congruenza dei triangoli puoi dimostrare che: dato un angolo e la sua bisettrice, ogni punto della bisettrice è ugualmente distante dai lati dell'angolo. (3_6, p. 170)

Questi ultimi esempi portano all'estremo la struttura presentativa dell'elenco, con l'uso che potremmo definire quasi troppo "scolastico" dei due punti. Non si tratta, comunque, di gravi errori grammaticali, ma di usi che non costituiscono certamente un buon modello di scrittura cui esporre apprendenti che si trovano in un'età in cui la loro capacità di composizione scritta è ancora in pieno sviluppo, e dunque facilmente condizionabile. A conferma di ciò, proprio nella scrittura degli apprendenti non è raro trovare casi come questi (si tratta di testi scritti da allievi di scuola primaria e secondaria di primo grado, ripresi da Fornara *et al.*, 2015, p. 87):

Dopo la partita ero andato in spogliatoio e dopo aver fatto la doccia vidi un mio compagno di squadra che: picchiava, insultava ecc. (V primaria)

Il programma era: cena a base di pizza, colazione con pane, torta e naturalmente tanta nutella da poter gustare in tutta tranquillità. (II secondaria di primo grado)

6.3.6 Conclusioni

I fenomeni interpuntivi presi in esame hanno permesso di rispondere ai due scopi principali di questo approfondimento: in primo luogo, possiamo senz'altro confermare che gli usi della punteggiatura più problematici nella scrittura di oggi sono rappresentati anche nel corpus DFA-Italmatica, nei testi di tutti i livelli scolastici, anche se quantitativamente in maniera non così significativa; in secondo luogo, possiamo d'altro canto sostenere che solo in pochissimi casi questi usi problematici possono generare possibili problemi di comprensione. Ciò avviene in particolare in corrispondenza dell'uso della virgola al posto dei segni più forti, in ragione del fatto che un uso così generico della virgola non permette di gerarchizzare le informazioni in maniera chiara e trasparente, e in misura minore nella gestione della struttura testuale dell'elenco, che a volte appare un po' confusa, cosa paradossale, se si considera che l'elenco, una soluzione molto diffusa nei testi di matematica proprio per la sua sistematicità e chiarezza, dovrebbe appunto rispondere all'esigenza di sintetizzare in maniera efficace il contenuto informativo del testo. E proprio questa esigenza è al centro di un'ulteriore considerazione che emerge dallo spoglio dei testi appartenenti al corpus: i casi problematici sono più numerosi nei testi rivolti alla scuola primaria rispetto a quelli rivolti alla scuola secondaria di primo grado, sia in termini assoluti, sia in proporzione alla quantità di testo presente, molto maggiore in questo secondo gruppo di testi. La spiegazione più logica è che quando i testi si rivolgono ad allievi più giovani cercano di esprimere contenuti informativi complessi attraverso una sintesi spesso estrema (testimoniata dalla netta prevalenza di un periodare breve e conciso, in cui dominano le frasi semplici e la giustapposizione) che va a scapito della chiarezza e della trasparenza nella gerarchizzazione dei contenuti stessi. Al contrario, quando i testi si rivolgono ad allievi più grandi, il periodo e gli enunciati diventano più lunghi e complessi, cosa che consente di esplicitare meglio i nessi logici, a vantaggio di una maggiore chiarezza informativa. Ciò appare coerente con le conclusioni di precedenti indagini (si veda, in particolare, lo studio Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020).

Tra le parole del corpus: lessico e leggibilità

Finora le analisi si sono concentrate principalmente sulle unità significative che compongono il testo scolastico di matematica, sulle peculiarità strutturali e sulle caratteristiche informative, toccando vari aspetti della testualità tipicamente matematica, in relazione anche con gli aspetti figurali; ciò sulla scia di quanto sostenuto da Balboni (2007), e cioè che nella lingua speciale di una disciplina sia l'intera struttura linguistica a mutare rispetto all'uso comune, assumendo tratti particolari a diversi livelli (non a caso l'autore le chiama *microlingue*).

Tuttavia, per una descrizione accurata del corpus, è fondamentale, a questo punto, affrontare alcuni aspetti ulteriori:

- illustrare alcuni dati quantitativi sul lessico nell'insieme del corpus, nei corpora nazionali e nei diversi sub-corpora (**par. 7.1**);
- fornire alcune indicazioni rispetto alla *leggibilità* dei testi (**par. 7.2**), individuando anche alcuni limiti dei rilievi automatici e alcuni necessari approfondimenti: come spiegato nel **capitolo 4**¹, la leggibilità, ottenuta tramite Corrige.it, è misurata con l'indice *Gulpease*, che considera la lunghezza delle parole e delle frasi, mettendo in relazione il valore ottenuto con il livello d'istruzione dei lettori per determinare se un testo è di lettura facile o difficile per un certo destinatario;
- descrivere la qualità del lessico presente nei testi (**par. 7.2**): le parole, infatti, giocano un ruolo chiave nei processi di lettura e di comprensione da parte del lettore, con peculiarità specifiche nel testo disciplinare. Non a caso, Cortelazzo (1994a, p. 9) scrive che «è il lessico a fornire elementi distintivi che individuano una lingua speciale». Oltre alle misure di leggibilità, basate su criteri che considerano la difficoltà di decodifica data da parole e frasi lunghe, Corrige.it restituisce anche quante parole di un testo appartengono al Vocabolario di Base (VdB)², però la lingua della matematica dà non pochi problemi agli strumenti automatici di analisi, poiché è dotata non solo di termini tecnico-specialistici monosemici, ma anche di molte parole-termini circolanti nella lingua di tutti i giorni. Queste parole-termini rientrano nel Vocabolario di Base nelle loro accezioni circolanti nell'uso e il software le intende così, ma, nel testo matematico, sono ovviamente da considerarsi nell'accezione di lessico tecnico-specialistico;

1. Si rimanda a questo capitolo per una breve descrizione degli strumenti usati per ricavare i dati presentati in questo capitolo.

2. Ricordiamo che nel VdB rientrano le parole fondamentali (F0), ossia i circa 2'000 lessemi più ricorrenti in ogni discorso, che costituiscono circa il 90% di qualunque testo italiano, le parole di alto uso (AU), cioè i 2'500-3'000 lessemi di frequenza immediatamente inferiore, e quelle di alta disponibilità (AD), vale a dire circa 2'300 lessemi che non si dicono né si scrivono frequentemente, ma che sono legati a oggetti, fatti o esperienze ben note perlomeno a tutte le persone adulte.

- proporre altre misurazioni per cogliere aspetti che contribuiscono alla complessità del testo scolastico di matematica (**par. 7.3**): in particolare la *ricchezza lessicale*, la *densità lessicale* e la quantificazione delle principali parti del discorso (che, assieme all’impatto delle *forme nominali* dei verbi, conferma la *deagentivizzazione* e la forte presenza di sostantivi nei testi matematici);
- passare in rassegna, quantitativamente, alcune parole o locuzioni significative e ricorrenti (**par. 7.4**), rispetto alle quali ulteriori esempi saranno offerti nel capitolo 8, e osservare la quantità e la qualità dei connettivi³.

Il tutto, come emergerà dal **paragrafo 7.5**, al fine di cogliere e indagare quegli elementi che possono cooperare a rendere i testi ostici per i loro lettori: perseguendo questa finalità, si è data quindi priorità e centralità agli elementi che si reputano più salienti in questo senso, senza pretendere di illustrare tutti gli aspetti possibili. D’altronde, l’aver limitato il contenuto dei testi in esame ai soli *poligoni* circoscrive già a priori la varietà semantico-lessicale, che è quindi in larga parte prevedibile: in ogni livello scolastico e in ogni classe, infatti, il tema viene toccato e ripreso integrando via via elementi nuovi e più complessi. Le parole piene danno conto di questa situazione, mostrando quali sono i lemmi, e dunque gli elementi e i temi specifici, più ricorrenti nei vari sub-corpora.

7.1 La geometria attraverso le parole: rilievi sul vocabolario del corpus

Per prima cosa è utile offrire un’indicazione sulla dimensione del corpus (cioè sul numero complessivo di parole che contiene, includendo nel conteggio tutte le occorrenze o *token* presenti) e sull’ampiezza del corpus (cioè sul numero complessivo di lemmi o *type*). Successivamente, si presenteranno alcune liste relative ai lemmi di maggiore frequenza.

7.1.1 Dati quantitativi globali: dimensione e ampiezza

Il corpus DFA-Italmatica è un corpus specialistico di dimensioni non troppo grandi e dal contenuto omogeneo: conta 380’030 occorrenze (se si contano le singole parole grafiche), che scendono a 278’893⁴ se si considerano nel conteg-

3. Per le varie estrazioni d’informazione e per le misurazioni lessicometriche ci si è avvalsi dell’uso di Corrige.it, T-LAB, TalTaC^{2.10}, Sketch Engine, AntConc e READ-IT, brevemente presentati nel **capitolo 4**. L’uso di più di uno strumento ha permesso di affinare le ricerche e di confrontare i risultati nella prospettiva di ottenere una maggiore affidabilità.

4. I calcoli sono stati effettuati con T-LAB, TalTaC^{2.10} e Sketch Engine; dal conteggio delle parole sono stati esclusi segni diversi (come l’interpunzione e i simboli matematici), ma sono stati inclusi i numeri; i numeri scritti in parola sono stati considerati come lemmi.

gio le polirematiche individuate dai dizionari associati agli strumenti in uso, più quelle matematiche⁵, aggiunte manualmente in fase di preparazione del corpus e dei software. La distribuzione per nazione e per anno scolastico è la seguente (Tabb. 1 e 2):

	<i>Dimensione (N)</i> (<i>token</i> , occorrenze)	Percentuale dei cor- pora nazionali rispetto alla dimensione del corpus (<i>token</i>)	<i>Ampiezza (V)</i> (<i>type</i> , lemmi)
Corpus italiano	354'657 (parole grafiche) 258'530; (considerando le polire- matiche).	93,50%	4'841 (4'771 considerando le polirematiche).
Corpus svizzero	<i>Sub-corpus TI</i> : 17'964 (parole grafiche), 14'356 (considerando le polire- matiche).	6,50%	<i>Sub-corpus TI</i> : 1'433 (1'399 considerando le polirematiche).
	<i>Sub-corpus GR</i> : 7'409 (parole grafiche), 6'007 (considerando le polire- matiche).		<i>Sub-corpus GR</i> : 789 (759 considerando le polirematiche).
Corpus DFA-Italmatica	380'030 parole grafiche; 278'893 considerando le polirematiche.	100%	5'137' (5'078 considerando le polirematiche).

Tab. 1 – *Token* e *type* del corpus DFA-Italmatica (con dettaglio dei corpora italiano e svizzero).

Nella tabella seguente sono invece riportati nel dettaglio i numeri di *token* e *type* presenti nei singoli sub-corpora, così da mostrare dimensione e ampiezza classe per classe:

5. Limitandoci all'essenziale, abbiamo individuato le seguenti: *a due a due*, *angolo al vertice*, *angolo alla base*, *asse di simmetria*, *centro di massa*, *figura geometrica*, *figura piana*, *non poligono*, *numero fisso*, *parte di piano*, *piede dell'altezza*, *piede della perpendicolare*, *punto di equilibrio*, *punto di incontro*, *punto di intersezione*, *punto interno*, *punto medio*, *punti notevoli*, *proiezione ortogonale*, *quadrilatero comune*, *unità di misura*.

6. In questo capitolo, data la ricchezza dei dati in tabella, per compattezza ci serviamo delle sigle TI per ticinese e GR per grigionese.

7. Questo numero non è il risultato della somma di quelli delle righe precedenti: infatti, il totale dei lemmi di tutto il corpus DFA-Italmatica non è dato dalla somma dei lemmi ricavati dai corpora italiano e svizzero, in quanto alcuni lemmi, ovviamente, sono presenti in entrambi i corpora, ma vengono conteggiati una sola volta nel totale.

		II SP		III SP		IV SP		V SP		VI SP		I SSPG		II SSPG		III SSPG	
Corpus italiano	Token	3'092		11'388		59'658		47'073		-		133'341		93'452		6'653	
	Type	385		776		1'770		1'800		-		3'532		2'842		628	
Corpus svizzero		TI	GR	TI	GR	TI	GR	TI	GR	TI	GR	TI	GR	TI	GR	TI	GR
	Token	-	88	-	429	-	636	-	882	-	3'327	10'392	2'047	5'325	-	2'247	-
	Type	-	41	-	136	-	198	-	186	-	416	1'109	456	776	-	427	-

Tab. 2 – Token e type per classe del corpus DFA-Italmatica.

La lemmatizzazione e l'etichettatura per parti del discorso (*PoS Tagging*) delle parole presenti nel corpus hanno permesso anche di ricavare osservazioni sulla consistenza del lessico, caratterizzato da un'alta presenza di sostantivi, che rappresentano il 33,37% delle parole del corpus, contro il 16,39% di verbi. Ciò conferma la notevole *densità nominale* del testo di matematica, cioè il fatto che quella della matematica è una lingua ricca di sostantivi, alcuni formatisi, nei secoli, tramite *nominalizzazione* (ad esempio *circonferenza*⁸, *congruenza*, *equivalenza*, *incidenza*, con tipico suffisso deverbale -enza, Fiorentino, 2011); al riguardo, è interessante quanto scritto da Colombo:

Una forma di astrazione particolarmente efficace nel condensare le idee è la nominalizzazione: ciò che potrebbe essere espresso da un verbo coi suoi soggetto e complementi viene espresso da un nome deverbale caricato di propri complementi che prendono il posto degli argomenti del verbo: si ha così, invece dell'articolazione di un periodo in frasi, una lunga frase "semplice" (nel senso che ha un solo verbo) carica di complementi; vanno perdute le determinazioni di tempo proprie delle forme verbali e il risultato di solito è più breve di qualche parola, ma di più ardua comprensione (Colombo, 2012, p. 4).

A questo corrisponde una diffusa *deagentivizzazione* (resa, inoltre, dalle forme nominali del verbo, come infiniti, gerundi e participi presenti, molto attestati nei testi matematici; si veda su questo il par. 7.3.1).

Il lavoro di lemmatizzazione del corpus non è stato facile né immediato, perché i software non sono concepiti per lavorare sul testo tecnico-specialistico; pertanto, si sono dovute effettuare diverse correzioni, disambiguazioni e riconduzioni di numerose forme alla categoria grammaticale di pertinenza in contesto (ad esempio, ricondurre parole come *mediana* o *retta* alla categoria "sostantivo", in quanto sono pressoché sempre usate in modo sostantivato, mentre gli strumenti le etichettano come "aggettivi").

8. Di cui può essere significativo esplicitare l'etimologia latina: dal verbo *circumferre*, "portare intorno".

7.1.2 Dati qualitativi globali: i lemmi più frequenti

Dopo aver ricavato la consistenza quantitativa in termini di occorrenze (*token*) in tutto il corpus DFA-Italmatica e nei corpora italiano e svizzero, è ora il momento di osservare i lemmi (*type*) più frequenti – pieni e vuoti insieme, in ordine decrescente di frequenza – dapprima in tutto il corpus (separando i corpora nazionali, in **Tab. 3**) e poi classe per classe per quanto riguarda il corpus italiano, di dimensione maggiore (**Tab. 4**), così da ricavare il quadro dei vocaboli attraverso i quali viene proposto il tema *poligoni* nei testi di geometria fra la scuola primaria e secondaria di primo grado; vediamo quindi quali sono i lemmi più frequenti.

Corpus italiano	il, essere, la, e, di, un, lato, del, a, triangolo, angolo, poligono, lo, che, avere, in, cm, si, area, due, per, con, della, base, misura, rettangolo, altezza, una, figura, potere, congruenti, diagonale, se, vertice, al, calcolare, perimetro, trapezio, punto, quadrato, stesso, quadrato, tutto, uguale, circonferenza, regolare, alla, da, non, numero.	
Corpus svizzero	<i>Sub-corpus TI</i> : di, il, un, essere, e, la, del, lato, che, angolo, triangolo, poligono, a, avere, si, con, lo, in, due, una, regolare, della, per, potere, figura, cm, area, vertice, rettangolo, dire, non, suo, ampiezza, punto, se, tutto, isoscele, simmetria, diagonale, quadrilatero, base, trapezio, al, anche, interno, congruenti, stesso, retta, lunghezza, quadrato.	<i>Sub-corpus GR</i> : il, e, la, un, di, a, con, triangolo, del, in, essere, quadrato, rettangolo, figura, una, area, della, lo, lato, quadrilatero, avere, costruire, cm, due, passo, punto, da, angolo, diagonale, forma, diverso, ottenere, geometrico, che, nel, simmetria, squadra, trovare, si, quattro, traccia, pavimentazione, perimetro, tutto, su, basilare, foglio, modo, compasso, utilizzare.

Tab. 3 – I primi 50 lemmi (*type*) più frequenti nel corpus DFA-Italmatica.

Nel corpus italiano, i primi 6 *type* (lemmi) ricoprono circa 1/5 del totale delle occorrenze (e un dato analogo vale per i ben più piccoli sub-corpora svizzeri). L'omogeneità tematica fa ovviamente sì che non vi sia molta varietà lessicale tra i lemmi più frequenti nell'insieme del corpus e che la varietà lessicale non sia elevatissima, soprattutto per quanto concerne le parole più frequenti, che si ripetono molto; vi sono, però, ben 1'909 lemmi *hapax*, cioè che compaiono una sola volta nel corpus: il 37% del totale dei lemmi. È proprio nei lemmi di rango più basso, attestati 1, 2 o 3 volte nei sub-corpora, che si hanno le parole più eterogenee e inattese (ad esempio, in V primaria abbiamo con una sola occorrenza parole come *tetto*, *monte*, *Luigi*, *cantina*, *Mondrian*, *vassoio*, che danno l'idea della varietà di contesti ed esempi che affiancano i passaggi teorici).

Come vedremo al **paragrafo 7.2.3**, a questo quadro complessivo corrisponde un'elevata ricchezza lessicale media: nel singolo testo il lettore spesso si trova di fronte a un lessico ampio e variato, sia a livello di terminologia matematica specifica (in corrispondenza del nuovo sapere che viene veicolato in modo incrementale),

sia per quanto riguarda altre parole, che possono essere di registro alto (si pensi ai tecnicismi secondari condivisi con altre discipline, come *modello* o *motivazione*, talvolta in collocazioni tipiche del discorso matematico, come ad esempio *enunciare* in riferimento a *criteri* o *proprietà*) o anche parole del quotidiano, nel caso di spezzoni testuali che contengano riferimenti alla realtà. Nella **Tabella 3** si noti, poi, ancora, come aspetto significativo, l'assenza del termine *poligono* fra i primi 50 lemmi nel sub-corpus grigionese: esso compare solo all'82° posto come rango di frequenza. È però presente tra i primi posti il termine più generico *figura* (al 14° posto) e lo sono termini più specifici come *triangolo* (all'8° posto), *quadrato* (al 12°), *rettangolo* (al 13°), *quadrilatero* (al 19°).

Per quanto riguarda il più vasto corpus italiano, vediamo ora di passare in rassegna le parole (sia piene sia funzionali) più frequenti sub-corpus per sub-corpus, tracciando così un quadro di come viene proposto il tema *poligoni* nei libri delle varie classi (**Tab. 4**); nella **Tabella 4** abbiamo sottolineato, per distinguerli a colpo d'occhio, i lemmi verbali.

Corpus italiano	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Parole piene (primi 15 lemmi in ordine decrescente di frequenza)	1. figura ⁹ 2. poligono 3. <u>essere</u> 4. linea 4. lato 5. <u>avere</u> 6. quadrato 7. chiuso 8. confine, piano 9. <u>colorare</u> 10. vertice 11. spezzato ¹⁰ 12. regione 13. rettangolo 14. <u>osservare</u> 15. triangolo	1. poligono 2. lato 3. <u>essere</u> 4. angolo 5. <u>avere</u> 6. misura 7. vertice 8. perimetro 9. figura ¹¹ 10. numero 11. area 12. linea 13. <u>calcolare</u> 14. due 15. <u>chiamare/-si</u>	1. lato 2. <u>essere</u> 3. cm 4. <u>avere</u> 5. area 6. base 7. triangolo 8. angolo 9. altezza 10. misura 11. poligono 12. rettangolo 13. due ¹² 14. trapezio 15. <u>calcolare</u>	1. lato 2. <u>essere</u> 3. cm 4. poligono 5. <u>avere</u> 6. triangolo 7. area 8. misura 9. angolo 10. perimetro 11. base 12. <u>calcolare</u> 13. regolare 14. uguale 15. altezza	1. <u>essere</u> 2. lato 3. triangolo 4. angolo 5. due 6. poligono 7. <u>avere</u> 8. congruenti 9. vertice 10. punto 11. rettangolo 12. interno ¹³ 13. <u>potere</u> 14. base 15. diagonale	1. <u>essere</u> 2. area 3. poligono 4. lato 5. circonferenza 6. triangolo 7. misura 8. <u>avere</u> 9. altezza 10. base 11. formula 12. due 13. rettangolo 14. figura ¹⁴ 15. <u>potere</u>	1. circonferenza 2. <u>essere</u> 3. poligono 4. lato 5. punto 6. regolare 7. <u>inscrivere</u> 8. raggio 9. triangolo 10. <u>dire</u> 11. centro 12. tutto 13. <u>avere</u> 14. angolo 15. <u>potere</u>

→

9. 32 volte su 122 occorrenze nella polirematica *figura piana*.

10. 46 occorrenze unicamente al femminile *spezzata/-e*, associato a *linea* o da solo.

11. 35 volte su 171 occorrenze nella polirematica *figura piana*.

12. Riportato nella lista in quanto compare scritto in parola.

13. In 652 casi su 856 occorrenze nella polirematica *angolo interno*; negli altri casi co-occorre per lo più con *punto* o *diagonale*.

14. 63 volte su 691 occorrenze nella polirematica *figura piana*.

Parole funzionali (primi 15 lemmi in ordine decrescente di frequenza)	1. il 2. la 3. e 4. una 5. di 6. un 7. che 8. non 9. del 10. da 11. si 12. con 13. questo 14. ogni 15. poi	1. il 2. di 3. la 4. e 5. del 6. un 7. si 8. una 9. con 10. che 11. lo 12. a 13. nella 14. in 16. da	1. il 2. la 3. e 4. di 5. del 6. un 7. lo 8. a 9. per 10. in 11. che 12. con 13. della 14. una 15. come	1. il 2. la 3. e 4. di 5. a 6. del 7. un 8. lo 9. per 10. con 11. che 12. in 13. si 14. della 15. al	1. il 2. un 3. e 4. di 5. la 6. del 7. che 8. in 9. si 10. a 11. con 12. lo 13. se 14. al 15. della	1. il 2. a 3. la 4. di 5. e 6. del 7. un 8. lo 9. per 10. che 11. della 12. si 13. in 14. una 15. con	1. il 2. un 3. del 4. a 5. in 6. e 7. la 8. una 9. di 10. si 11. della 12. per 13. che 14. lo 15. alla
---	--	--	---	--	---	---	--

Tab. 4 – I lemmi (*type*) più frequenti nel corpus italiano, in ordine decrescente di frequenza.

La tabella permette di cogliere alcuni importanti segnali relativi al vocabolario dei testi. Come era prevedibile, poiché il corpus è incentrato su uno stesso argomento (*poligoni*) che viene approfondito anno dopo anno, le parole piene diventano sempre più specialistiche passando dai più generali termini *figura* e *poligono* in II e III primaria, a *lato* in IV e V primaria, e *lato*, *area* e *circonferenza* negli anni successivi; discorso a sé merita il verbo *essere*, estremamente ricorrente in tutti i testi e, in quello matematico, soprattutto con la funzione di copula: esso segnala l'aumento dei microatti *definizione* e *proposizione*, specialmente nei testi per la I e II secondaria di primo grado, in cui è il lemma pieno più ricorrente (e nelle classi precedenti è comunque un vocabolo di rango molto alto). Le parole funzionali (o vuote) rientrano prevalentemente nella categoria degli articoli e delle preposizioni semplici e articolate, eccezion fatta per la congiunzione *e*, estremamente diffusa.

La **Tabella 4** conferma come il testo di matematica sia ricco di sostantivi, tipico di una scienza che tende a presentarsi come “statica” (cioè a non descrivere particolari processi), *universale*, *atemporale*. A parte i casi di *essere* e *avere*, seguiti dal modale *potere*, spesso i lemmi verbali compaiono più in basso come rango rispetto alle prime 15 posizioni nell'elenco delle parole piene, cioè con un numero inferiore di occorrenze. Fanno eccezione i verbi *osservare* e *colorare* in II primaria (rispettivamente in 9^a e 14^a posizione), *calcolare* e *chiamarsi* in III primaria (in 13^a e 15^a posizione), e *calcolare* in 15^a e 12^a posizione in IV e in V primaria: questi lemmi danno un significativo indizio sul modo di comunicare dei testi agli allievi, confermando le richieste di azione concreta e reale (*osservare*, *colorare*) soprattutto per i più piccoli, cosa che viene già a calare, gradualmente, dalla III primaria, in cui risalgono verbi più tipici della matematica come l'azione di *calcolare* e il *chiamarsi* tipico delle definizioni (in questa classe, seguono i lemmi *osservare* in 20^a posizione e *scrivere* in 24^a). Poi, in I e II secondaria di primo grado, la densità di sostantivi dei

testi cresce ancora, e ne deriva che tra i primi 15 lemmi pieni come verbi si trovano solo *essere*, *avere* e *potere* (seguono, nel sub-corpus di I secondaria di primo grado, *dire* in 16^a posizione e *osservare* in 40^a; in quello di II secondaria di primo grado, *calcolare* in 16^a posizione e *ottenere* in 20^a); infine, in III secondaria di primo grado si ha un cambiamento ancora diverso, che segna il passo verso un nuovo e più maturo discorso matematico che include fra le parole piene di rango più alto anche verbi tecnici come *inscrivere* (in 7^a posizione) e *circoscrivere* (in 19^a posizione), e il verbo *dire* negli usi tipici del testo di matematica (impersonale o passivo).

Concentriamoci, dunque, sulle liste dei soli lemmi verbali (Tab. 5), considerando i primi 15, per capire meglio quali elementi semantici restano a loro carico.

Corpus italiano	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Primi 15 verbi in ordine di frequenza decrescente.	1. essere 2. colorare 3. avere 4. chiama-re/-rsi 5. ripassare 6. indicare 7. scrivere 8. delimitare 9. formare 10. chiudere 11. potere 12. rispondere 13. collegare 14. disegnare 15. calcolare	1. essere 2. avere 3. calcolare 4. chiama-re/-rsi 5. osservare 6. colorare 7. scrivere 8. delimitare 9. usare 10. misurare 11. contare 12. rispondere 13. potere 14. indicare 15. formare	1. essere 2. avere 3. calcolare 4. potere 5. osservare 6. ottenere 7. disegnare 8. moltiplicare 9. chiama-re/-rsi 10. colorare 11. formare 12. dividere 13. classificare 14. usare 15. misurare	1. essere 2. avere 3. calcolare 4. potere 5. osservare 6. dividere 7. ottenere 8. moltiplicare 9. conoscere 10. unire 11. disegnare 12. chiama-re/-rsi 13. trovare 14. risolvere 15. sommare	1. essere 2. avere 3. potere 4. dire ¹⁵ 5. osservare 6. chiama-re/-rsi 7. disegnare 8. considerare 9. ottenere 10. coincidere 11. dividere 12. tracciare 13. formare 14. costruire 15. verificare	1. essere 2. avere 3. potere 4. calcolare 5. ottenere 6. inscrivere 7. dire ¹⁶ 8. moltiplicare 9. dividere 10. circoscrivere 11. conoscere 12. considerare 13. osservare 14. ricavare 15. trovare	1. essere 2. inscrivere 3. dire ¹⁷ 4. potere 5. avere 6. circoscrivere 7. considerare 8. incontrare/-arsi ¹⁸ 9. coincidere 10. ottenere 11. passare 12. tracciare 13. moltiplicare 14. notare 15. intercambiarsi

Tab. 5 – I 15 lemmi verbali più frequenti in ogni sub-corpora del corpus italiano.

15. 747 occorrenze (225 *si dice*, 169 *si dicono*, 116 *è/viene detta/-o* e *sono/vengono dette/-i*, 8 *dicesi*, 14 *diciamo*, 9 *diremo*, 77 *dire*, 129 *detta/-o*, sia come participio passato da solo, sia nelle rarissime forme composte).

16. 283 occorrenze (97 *si dice*, 45 *si dicono*, 37 *è/viene detta/-o* e *sono/vengono dette/-i*, 8 *dicesi*, 15 *diciamo*, 7 *diremo*, 38 *dire*, 4 *dicendo*, 32 *detta/-o*, sia come participio passato da solo, sia nelle rarissime forme composte).

17. 54 occorrenze (14 *si dice*, 24 *è/viene detta/-o* e *sono/vengono dette/-i*, 16 *detta/-o*, sia come participio passato da solo, sia nelle rarissime forme composte).

18. 20 occorrenze *incontrarsi*, 3 *incontrare*.

I dati mostrano la costante dominanza del verbo *essere* sugli altri lemmi verbali, a conferma della tendenza del testo matematico a definire e descrivere, cioè a dire come *sono* le cose di cui si parla. Segue *avere*, che invece parla degli enti in termini di ciò che *hanno*, presentando un modello definitorio di tipo diverso, come si è visto al **capitolo 6**, o l'esigenza di mostrare proprietà soprattutto tramite proposizioni. Va precisato che *essere* e *avere* svolgono solo di rado la funzione di ausiliare nelle forme composte dei verbi (che come si è detto sono perlopiù all'indicativo presente), ma sono portatori del significato di copula che stabilisce una relazione predicativa (*essere* in casi come "Un triangolo è isoscele se almeno due dei suoi lati hanno la stessa lunghezza") e di *possedere* (*avere* in casi come "I poligoni concavi hanno almeno una diagonale esterna"). I rari casi in cui *essere* e *avere* svolgono la funzione di ausiliari sono per lo più in frasi con funzione di collegamento intratestuale, cioè interna al testo stesso, per effettuare rimandi e collegamenti o richieste in riferimento a quanto visto o presentato prima ("Così come abbiamo visto per i parallelogrammi...", "Sono stati disegnati tre rettangoli di cui si vuole conoscere l'area..."). Il verbo *potere*, poi, è un modale tipico del linguaggio della matematica, che tende a farne un altissimo uso in forme come "Se si tracciano le diagonali si può osservare...", "Puoi inoltre verificare che il circocentro..." e molti altri casi analoghi.

I verbi *chiamare/-rsi* (prevalentemente *chiamarsi* nelle forme *si chiama/si chiamano*, ma anche più raramente *chiamare* nelle forme passive come *è chiamato/sono chiamati*) e *dire* (nelle forme impersonali o passive, soprattutto *si dice*, *si dicono*, *è detto/è detta*, *sono detti/-e*, ma anche *diciamo*) hanno la funzione pressoché unica di alternative a *essere* e *avere* nelle *definizioni* e nelle *proposizioni* e di portare l'attenzione sull'aspetto *denominativo*: *chiamare/-rsi* è verbo di rango alto, cioè molto usato in II e III primaria mentre cala in IV e V primaria e in I secondaria di primo grado per scendere ancora in II e III (non è tra i primi 15 verbi come frequenza d'uso); a partire dalla I secondaria di primo grado prende però spazio il verbo *dire*, evidentemente preferito al crescere della scolarità.

7.2 Leggibilità e qualità globale del lessico, tra Vocabolario di Base e tecnicismi

Dopo questa panoramica quantitativa sui lemmi di maggior frequenza nel lessico del corpus, come già fatto per il caso specifico delle *definizioni* (par. 6.2.2.4), presentiamo ora le misure di leggibilità date dall'indice *Gulpease* sui testi dei corpora italiano e svizzero, suddivise anche per classe. Ribadiamo che l'indice *Gulpease* misura la facilità di lettura di un testo su una scala di valori da 0 a 100, ponendo poi in relazione il valore ottenuto con il grado di scolarizzazione del lettore, che può essere elementare, medio o superiore (seconda riga delle **Tabb. 6 e 7**). Inoltre, presteremo attenzione alla qualità del lessico, quantificando, sulla base della re-

stituzione automatica di Corrige.it, la presenza di lemmi del Vocabolario di Base, ma soprattutto ponendoci il problema di cogliere l'incidenza reale dei tecnicismi.

7.2.1 Leggibilità e parole riconducibili al VbB nel corpus italiano

Cominciamo con un prospetto del corpus italiano (Tab. 6), per poi passare a quello svizzero, ricordando che, nella scala dell'indice *Gulpease*, più il valore si avvicina a 100 più un testo è di facile lettura per qualsiasi profilo di lettore. Nella seconda riga, per le classi di secondaria di primo grado riportiamo la facilità o difficoltà di lettura sia in riferimento a lettori con scolarità elementare (che i destinatari hanno completato), sia rispetto a lettori con scolarità media (che i destinatari dei testi stanno frequentando).

Corpus italiano	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Leggibilità media	87	86	82	84	70	71	60
Leggibilità in relazione al grado di scolarizzazione del lettore	Elementare: <i>facile</i>	Elementare: <i>facile</i>	Elementare: <i>facile</i> (per poco: al di sotto di 80 diventa <i>difficile</i>)	Elementare: <i>facile</i> (per poco: al di sotto di 80 diventa <i>difficile</i>)	Elementare: <i>difficile</i>	Elementare: <i>difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>
					Medio: <i>facile</i>	Medio: <i>facile</i>	Medio: <i>facile</i>
Leggibilità minima	50	41	38	31	34	30	40
Numero medio di parole per proposizione	7	7	8	8	11	11	12
Percentuale di parole del VdB	91%	87%	84%	79%	80%	78%	71%

Tab. 6 – La misurazione della leggibilità dei testi dei sub-corpora delle varie classi (corpus italiano).

Come si può notare, la leggibilità dei testi si complica al crescere dell'anno di scolarità per cui sono concepiti, con una notevole frattura tra l'ultimo anno della scuola primaria e il primo della secondaria di primo grado: passaggio che conferma un cambiamento repentino della manualistica, che pare evolvere bruscamente, senza considerare il bisogno di gradualità degli allievi. Ne consegue che i testi per gli studenti di scuola secondaria di primo grado, che hanno quindi completato la sola scolarità primaria, sono di lettura "difficile" per loro. Questi dati vanno infatti letti con un'importante precisazione: l'indice *Gulpease* considera il livello d'istruzione dei lettori dal completamento

della primaria in poi (lo strumento usa la voce “elementare”), percorso che i lettori da noi considerati non hanno in gran parte ancora completato. Ciò significa che un testo considerato di facile lettura per chi ha completato la scolarità primaria può non esserlo affatto per un allievo di II o III; pertanto, tale stima è puramente indicativa.

I valori medi di leggibilità sono comunque piuttosto bassi (com'è prevedibile per un testo scientifico, anche se scolastico), se si considera che un testo facile o molto facile per tutti dovrebbe presentare un indice di leggibilità superiore a 80. Inoltre, vi sono valori minimi di *Gulpease* che segnalano parti di testo che possono risultare “quasi incomprensibili” per dei lettori che non hanno ancora completato la scuola primaria, come questo passaggio tratto da un volume di III primaria, con indice 51:

- (1) **Per calcolarla, si sceglie una figura piana come unità di misura e si conta quante di queste figure occorrono per ricoprire tutta la superficie del poligono¹⁹.** (4_3, p. 252)

Oltre alla complessità data dalla lunghezza delle parole e della frase, si possono osservare alcuni elementi morfosintattici non semplici per un lettore non ancora esperto: due subordinate implicite di natura finale (esprimono il fine di un'azione), una all'inizio (*Per calcolarla*) e un'altra in seguito (*per ricoprire*), e due forme verbali col *si* impersonale. Ma è la qualità specialistica del lessico l'elemento che maggiormente sfugge alla misurazione automatica, che però andrebbe considerato se si vuole riflettere sulla reale difficoltà di un testo: *figura piana* è una polirematica dal significato tecnico-specialistico ben preciso in geometria, per quanto sia composta da due lemmi appartenenti al lessico fondamentale (FO), così come *unità di misura*; inoltre, *superficie* e *poligono*, rispettivamente marcati come FO e AU, in questo contesto sono termini tecnico-specialistici monosemici, di cui per comprendere appieno il testo i lettori devono avere una precisa conoscenza.

Consideriamo ora un altro esempio tratto, però, dal corpus di I secondaria di primo grado, con indice di leggibilità 40, quindi considerato molto complesso (“quasi incomprensibile” per un lettore con istruzione primaria o secondaria di primo grado, al punto da originare una “lettura con frustrazione”):

- (2) **I criteri di congruenza dei triangoli, nel caso dei triangoli rettangoli, presentano enunciati particolari perché tali triangoli hanno sempre una coppia di angoli retti congruenti.** (7_6, p. 225)

¹⁹. Qui e in altri esempi in seguito, come nel capitolo 6 e sempre attenendosi alle convenzioni in uso nei lavori sul Vocabolario di Base, le parole fondamentali (FO) sono in grassetto, le parole di alto uso (AU) sono in tondo chiaro e quelle di alta disponibilità (AD) in corsivo.

Anche in questo caso, all'indice ricavato in automatico andrebbero integrati ulteriori aspetti che possono incidere sulla comprensione del lettore. Prima tra tutti la qualità del lessico, che solo apparentemente è tutto appartenente al Vocabolario di Base. Ciò perché persino tra le parole in grassetto, cioè riconducibili al lessico fondamentale (FO), si annidano delle insidie disciplinari che rappresentano il cuore del discorso sul lessico specialistico della matematica: rientra, tra queste, *angolo retto*, che, in realtà, per quanto sia composto da due parole FO, ha un senso geometrico ben preciso, che il lettore deve conoscere per comprendere il senso d'insieme. Questo accade con moltissime parole della matematica: i tecnicismi con diverse accezioni e impieghi nella lingua comune, che sono sì familiari a chi legge (e quindi fanno parte del Vocabolario di Base), ma proprio per questo possono essere insidiosi in ambito disciplinare. Nell'esempio (2), quindi, per avere una fotografia più realistica della qualità del lessico, andrebbero segnalati come tecnicismi i lemmi *criterio*, *congruenza*, *triangolo*, *rettangolo*, *angolo*, *retto*, *coppia*, *congruente*, tutti marcati in De Mauro (1999) anche come lessico tecnico-specialistico (TS). Infine, non andrebbero dimenticati alcuni usi particolari dello stile manualistico disciplinare, come quello di *tali*, che, per quanto indicato come FO, è senz'altro poco familiare agli allievi più giovani, che ne assorbono un simile uso soltanto tramite l'esposizione frequente al testo scolastico in cui esso sopravvive accanto al più consueto *queste/-i*.

In effetti, la reale incidenza del lessico tecnico-specialistico nel testo scolastico matematico si dovrebbe ottenere non solo osservando i lemmi che anche gli strumenti automatici riconoscono come tecnicismi (come ad esempio *apotema*), ma considerando quanti lemmi appartenenti al Vocabolario di Base sono, in realtà, anche termini tecnico-specialistici. Facendo ciò, l'incidenza della terminologia specialistica cambierebbe di molto, poiché moltissime parole considerate dal software come appartenenti al Vocabolario di Base nel genere di testo qui in esame andrebbero annoverate tra i termini tecnico-specialistici. Quest'operazione risulta molto complessa in quanto, per ora, non sono disponibili strumenti in grado di distinguere il valore di una parola in contesto (andrebbero impostati e addestrati per questo fine su particolari corpora).

Per provare però comunque a dare un'idea dell'incidenza reale del lessico tecnico-specialistico peculiare della geometria, consideriamo l'elenco dei primi 60 sostantivi ricavato dall'intero corpus, cioè delle parole maggiormente portatrici di informazione:

1. lato, 9'253, 2. triangolo, 6'654, 3. poligono, 5'919, 4. angolo, 5'693, 5. area, 3'622, 6. base, 3'123, 7. misura, 3'046 (244 occorrenze in *unità di misura*), 8. cm, 2'743, 9. altezza, 2'616, 10. figura, 2'537 (217 volte in *figura/-e piana/-e*), 11. vertice, 1'974, 12. perimetro, 1'797, 13. punto 1'703 (9 in *punto di equilibrio*, 82 in *punto/-i di incontro*, 52 in *punto/-i di intersezione*, 30 in *punto/-i interno/-i*, 233 in *punto/-i medio/-i*, 119 in

punto/-i notevole/-i), **14.** trapezio, 1'699, **15.** diagonale, 1'651, **16.** quadrato, 1'643, **17.** quadrilatero, 1'631, **18.** circonferenza, 1'542, **19.** rettangolo, 1'518, **20.** numero, 1'337, **21.** formula, 1'253, **22.** somma, 1'203, **23.** rombo, 1'116, **24.** parallelogramma/-o, 1'109, **25.** segmento, 1'041, **26.** asse, 896 (441 volte in *asse/-i di simmetria*), **27.** lunghezza, 642, **28.** esempio, 625, **29.** proprietà, 621, **30.** centro, 620, **31.** parte, 571, **32.** superficie, 553, **33.** apotema, 532, **34.** linea, 516, **35.** simmetria, 494 (441 volte in *asse/-i di simmetria*), **36.** piano, 493, **37.** metà, 484, **38.** raggio, 480, **39.** pentagono, 469, **40.** forma, 466, **41.** esagono, 462, **42.** circocentro, 433, **43.** coppia, 402, **44.** modo, 392, **45.** retta, 378, **46.** romboide, 371, **47.** criterio, 348, **48.** unità, 326 (244 occorrenze in *unità di misura*), **49.** caso, 322, **50.** ipotenusa, 315, **51.** baricentro, 299, **52.** piano, 287, **53.** ampiezza, 284, **54.** congruenza, 281, **55.** cateto, 280, e circocentro, 280, **56.** contorno, 278, **57.** ortocentro, 263, **58.** caratteristica, 262, **59.** nome, 252, **60.** dimensione, 249.

Questi lemmi contribuiscono alla dimensione del corpus con ben 82'187 occorrenze, coprendo da soli il 21,63% di tutte le occorrenze. Di essi, solo 8 lemmi, non sono segnalati nel *Grande dizionario italiano dell'uso* (De Mauro, 1999) anche come tecnico-specialistici (TS) della matematica; da questi 8 va ulteriormente tolta *metà*, che, sebbene non sia marcata come TS nel dizionario, rientra in modo specifico nell'ambito matematico. Vale a dire che solo 7 sostantivi sui 60 più frequenti nel corpus, sopra sottolineati, non hanno accezioni tecnico-specialistiche, mentre l'88,33% di essi è composto da termini specialistici del linguaggio della matematica, sebbene la maggior parte rientri anche nel Vocabolario di Base con una o più accezioni d'uso comune.

Facendo una prova analoga sui primi 30 sostantivi di ogni sub-corpus, abbiamo un impatto della terminologia specialistica del 100% nei sub-corpora dalla IV primaria alla III secondaria di primo grado; solo nei primi anni della primaria fra i primi 30 sostantivi in ordine di frequenza se ne trovano alcuni senza connotazioni disciplinari: in II primaria 7/30 (*disegno, nome, parte, impronta, cartoncino, colore, oggetto*); in III primaria 6/30 (*quadretto, parte, lettera, nome, righello, quadratino*). Ecco i vari elenchi:

II SP: figura, poligono, linea, lato, chiuso, piano, confine, vertice, rettangolo, regione, quadrato, triangolo, contorno, numero, cerchio, disegno, perimetro, forma, superficie, nome, misura, lunghezza, parte, esagono, impronta, cartoncino, area, colore, oggetto, pentagono.

III SP: poligono, lato, angolo, misura, vertice, perimetro, figura, numero, area, linea, piano, cm, superficie, unità, contorno, triangolo, quadrilatero, rettangolo, segmento, quadretto, parte, punto, quadrato, pentagono, lunghezza, lettera, nome, esagono, righello, quadrato.

IV SP: lato, cm, area, base, triangolo, angolo, altezza, poligono, rettangolo, trapezio, perimetro, figura, quadrato, diagonale, parallelogramma, rombo, quadrilatero, vertice, romboide, numero, superficie, segmento, lunghezza, linea, forma, formula, somma, coppia, piano, punto.

V SP: lato, poligono, triangolo, area, misura, angolo, perimetro, base, altezza, numero, apotema, formula, rettangolo, quadrato, diagonale, trapezio, figura, esagono, rombo, quadrilatero, romboide, parallelogramma, vertice, punto, pentagono, segmento, superficie, centro, lunghezza, ottagono.

I SSPG: lato, angolo, triangolo, quadrilatero, poligono, triangolo, punto, somma, base, rettangolo, vertice, diagonale, figura, cm, mediana, trapezio, misura, perimetro, segmento, circocentro, baricentro, congruenza, parallelogramma, ortocentro, esempio, criterio, incentro, ipotenusa, quadrato, asse.

II SSPG: area, poligono, triangolo, circonferenza, misura, altezza, figura, base, rettangolo, lato, formula, quadrato, diagonale, apotema, trapezio, raggio, rombo, centro, somma, diagonale, misura, parallelogramma, punto, numero, prodotto, perimetro, metà, vertice, superficie, rapporto, proprietà.

III SSPG: circonferenza, poligono, lato, punto, raggio, centro, triangolo, apotema, angolo, misura, quadrilatero, area, vertice, quadrato, bisettrice, numero, circocentro, figura, somma, vertice, segmento, esagono, altezza, perimetro, rettangolo, arco, incontro, proprietà, raggio, asse.

L'osservazione dei sostantivi conferma che il discorso, già molto specialistico in partenza, si "tecnifica" e si specializza completamente al crescere della scolarità: nel sub-corpus di I secondaria di primo grado il primo sostantivo che non ha un significato prettamente matematico è *esempio*, in posizione 33^a, poi si trova *modo* in posizione 45^a; nel sub-corpus di II secondaria di primo grado il primo sostantivo non tecnico-specialistico è *modo*, in posizione 48^a, dopo il quale troviamo *caso* in posizione 50^a; infine, in III secondaria di primo grado il primo sostantivo che non ha un significato matematico è *caso*, addirittura in posizione 116^a, presente dieci sole volte.

7.2.2 Leggibilità e parole riconducibili al VdB nel corpus svizzero

Vediamo ora le misure di leggibilità del corpus svizzero (Tab. 7), sempre tenendo presente che si tratta di un corpus più piccolo e con una diversa composizione per quanto riguarda le classi:

Corpus svizzero	Corpus grigionese (GR)						Corpus ticinese (TI)		
Classi	II SP	III SP	IV SP	V SP	VI SP	I SSPG	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Leggibilità media	85	79	77	81	76	66	66	63	64
Leggibilità in relazione al livello scolastico	Elementare: <i>facile</i>	Elementare: <i>facile</i>	Elementare: <i>facile</i>	Elementare: <i>facile</i>	Elementare: <i>difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>	Elementare: <i>molto difficile</i>
						Medio: <i>facile</i>	Medio: <i>facile</i>	Medio: <i>facile</i>	Medio: <i>facile</i>
Leggibilità minima	67	48	54	42	46	37	36	36	38
Numero medio di parole per proposizione	6	7	8	8	9	11	11	14	14
Percentuale di parole del VdB	86%	90%	88%	84%	82%	86%	86%	81%	83%

Tab. 7 - La misurazione della leggibilità dei testi dei sub-corpora delle varie classi (corpus svizzero).

Pur con tutte le precisazioni prima espresse rispetto alla qualità del lessico e alla grande quantità di parole-termini che sfuggono agli strumenti automatici, si possono osservare due tendenze interessanti: la prima è un indice *Gulpease* medio particolarmente basso già a partire dai testi per la IV primaria, poi ancora a scendere nei testi dalla V primaria alla III secondaria di primo grado, cosa che denota una notevole difficoltà di lettura; la seconda, per contro, è che nel corpus svizzero la percentuale di parole appartenenti al Vocabolario di Base permane sempre molto alta in ogni sub-corpus relativo alle diverse classi, mantenendo (diversamente da quanto accade nel corpus italiano) valori superiori all'80%, anche nei sub-corpora della secondaria di primo grado. A ciò consegue una presenza leggermente inferiore di lessico tecnico-specialistico e una maggiore attestazione di parole del quotidiano, più vicine a chi legge sia nei riferimenti al reale, sia nel modo di rivolgersi al lettore stesso (ciò si osserva in particolare nei testi grigionesi).

Mostriamo due brevi esempi²⁰ tratti dai sub-corpora grigionesi della III primaria (1) e della I secondaria di primo grado (2), ben rappresentativi della qualità del lessico e della struttura dei periodi; nel caso (1) si tratta di un atto *direttivo* (che consta di istruzioni molto semplici, direttamente rivolte al lettore), nel (2) di una breve parte *dichiarativa*:

²⁰. Si riporta solo il testo per focalizzarsi sulla componente linguistica, ma nel testo vi è, ovviamente, la presenza di figure.

- (1) Ti occorrono le forbici e fogli quadrati.
Prendi alcuni quadrati della stessa grandezza e piegali in diversi modi.
Ritagliali lungo le linee delle pieghe.
Ricomponi i quadrati e incollali su un foglio.
Quale forma hanno i pezzi ritagliati?
Scrivi il nome della forma su ogni singola parte. (G1_3, p. 74)
- (2) I rettangoli e i quadrati sono due figure piane che s'incontrano spesso nella vita quotidiana. In un'aula trovi molti rettangoli e quadrati. (G1_7, p. 68)

In entrambi i casi il lessico è interamente appartenente al Vocabolario di Base; vi sono, però, ovviamente, alcune parole che hanno un significato propriamente matematico: *quadrato*, *linee*, e *forma* in (1), *figura piana*, *rettangolo* e *quadrato* in (2). Tali termini sono accostati esplicitamente ad azioni concrete in (1) e alla vita quotidiana in (2), con il richiamo al contesto dell'aula. Inoltre, in questi esempi (ma la cosa è molto comune) la sintassi è lineare e priva di informazioni in inciso.

Per quanto concerne il sub-corpus ticinese, l'andamento dialogico scelto da uno degli editori, che riproduce ampi scambi di battute fra ragazzi, fa sì che le scelte lessicali siano adeguate a passaggi di tono colloquiale. Lo si nota, a titolo d'esempio, in (3), tratto da un volume della I secondaria di primo grado:

- (3) Gero: «Ehi, Aba, tu che approfondisci sempre tutto, mi sai dire che cosa significa **poligono**?» Aba è in difficoltà e sfoglia velocemente il suo libro alla ricerca della risposta. Nel frattempo tu esegui l'esercizio che ti permetterà di capire facilmente la definizione di poligono. (T1_6, p. 142)

Sia nelle prime righe dedicate ai protagonisti, sia poi rivolgendosi al lettore ("tu esegui...") compaiono come tecnicismi solo *poligono* e *definizione* (nel senso matematico), a vantaggio di più parole dedicate a rendere vivace la scena e a coinvolgere il lettore.

7.2.3 Ulteriori indizi di complessità, tra lessico e sintassi

Per aggiungere ulteriori elementi di approfondimento rispetto alle misurazioni di leggibilità restituite tramite l'indice *Gulpease*, riprendiamo uno degli esempi esaminati sopra, considerato di leggibilità molto complessa:

- (1) I criteri di congruenza **dei triangoli**, nel caso dei *triangoli* rettangoli, **presentano** enunciati **particolari perché tali triangoli hanno sempre una coppia di angoli retti** congruenti. (7_6, p. 225)

La complessità non è data solo dalla lunghezza di parola e di periodo, ma anche dall'articolazione della sintassi, che contempla un inciso tra soggetto e verbo, e una subordinata introdotta da *perché*. Nel corpus, l'aumentare della complessità sintattica è confermato dal crescere del dato sulla presenza di subordinate, che passa da una media del 13% nei testi per la II e III primaria al 29% nei testi per la secondaria di primo grado.

Ma anche apparenti dettagli possono essere indizio di complessità a carico del processo di decodifica e interpretazione degli allievi. Ne è un esempio il costrutto nominale complesso iniziale ("I criteri di congruenza dei triangoli..."), che ci porta a riflettere su un elemento peculiare del testo matematico, all'incrocio fra lessico e sintassi: la presenza ricorsiva di *sintagmi preposizionali*. Si tratta in particolare di strutture costituite da una testa nominale modificata da aggettivi e da *sintagmi preposizionali*, del tipo "gli angoli formati da lati consecutivi contenenti punti del piano interni al poligono" (commentata al par. 2.1).

Il software READ-IT (Dell'Orletta *et al.*, 2011) consente di esaminare la "Profondità media di strutture nominali complesse". Osservando in verticale il corpus italiano, si può notare che la complessità, intesa come *profondità*, ossia il grado di ricorsività di questo tipo di strutture aumenta nei libri al crescere della scolarità, passando da una *profondità* media di 1,096 dei testi di II primaria a una *profondità* media di 1,213 dei testi di III secondaria di primo grado, con picchi intorno a 1,6 soprattutto in I e in II secondaria di primo grado; ciò offre un ulteriore indizio dell'aumento della complessità del testo. Le analisi, condotte a campione, confermano in generale la crescita della *complessità sintattica* nei libri di testo per le classi più avanzate: di ciò danno prova non solo la maggior presenza di subordinate, ma anche i dati relativi alla media delle altezze massime degli alberi sintattici corrispondenti alle frasi dei testi. L'*altezza degli alberi sintattici* è un parametro di complessità della frase calcolato in termini di numero massimo di relazioni di dipendenza delle parole rispetto alla radice (cioè, semplificando, alla parola) da cui dipendono: si va dal valore medio di 2 per la II primaria fino a 4,1 nei testi di I secondaria di primo grado, con picchi di 8 nei testi per gli anni seguenti. L'esempio (2) presenta una struttura sintattica caratterizzata da un albero particolarmente profondo, cioè particolarmente ricco di sintagmi legati l'uno all'altro, che in parte possiamo vedere in **Figura 1**²¹.

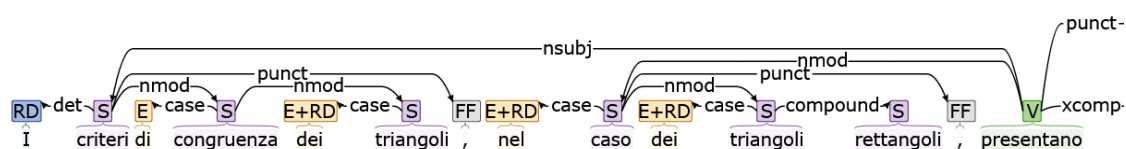


Fig. 1 - Rappresentazione dei rapporti tra le parole dell'esempio (2), prima parte.

21. Ricavata dalla demo online del software TINT (<https://dh.fbk.eu/tint-demo/#/home/>).

Senza addentrarsi troppo nei tecnicismi, l'immagine dà un'idea visiva di che cosa sia la complessità del testo al di là del suo aspetto lineare e superficiale, ma nella sua sostanza di relazioni che un lettore deve affrontare. Si può infatti notare la notevole distanza del nodo soggetto (nsubj) dal verbo (V) *presentano*, da cui dipende, distanza determinata dalla presenza di un *sintagma nominale complesso* (che inizia con "I criteri di congruenza...") e dalla presenza di un inciso: ne consegue che il lettore deve fare molta "strada" a livello di lettura e, poi, di costruzione del significato per collegare il soggetto al suo verbo.

7.3 Misurazioni lessicometriche significative

Sempre nella prospettiva di presentare ulteriori indicatori di complessità dei testi, proponiamo ora una sintesi di alcune misurazioni d'interesse, nell'ottica di ricavare specifici elementi di potenziale difficoltà per i giovani lettori:

- *ricchezza lessicale* media (*Type-Token Ratio*, TTR)²²;
- *densità lessicale* media²³;
- quantificazione e distribuzione delle parti del discorso più significative²⁴.

I dati verranno presentati esaminando un aspetto per volta, rilevando se e come ciascuno di essi varia al crescere della scolarità (dalla II e III primaria, poi in IV e V primaria, infine nei sub-corpora della secondaria di secondo grado).

7.3.1 Ricchezza lessicale

La *ricchezza lessicale* è una misura significativa per cercare di capire quanto è complesso un testo: essa quantifica la varietà dei lemmi presenti. Certo da sola non è sufficiente, perché, come abbiamo visto e come approfondiremo ancora, l'archi-

22. La TTR (*Type-Token Ratio*) è una misura ampiamente in uso in statistica lessicale, che consiste nel calcolare il rapporto tra il numero di *type* (parole-tipo, o lemmi: l'ampiezza del vocabolario di un corpus, V) e il numero di *token* (di occorrenze: la dimensione di un corpus, N). I valori di TTR oscillano tra 0 e 1: sono vicini a 0 se il vocabolario di un testo è poco vario, e valori vicini a 1 se è, invece, molto vario. Abbiamo calcolato la TTR classe per classe, ricavando un valore medio tra tutte le parti testuali dei sub-corpora (contenenti un numero di *token* non troppo diverso l'uno dall'altro).

23. La *densità lessicale* media indica il rapporto fra numero di occorrenze di parole piene (portatrici di contenuto) e numero totale di parole in un corpus (è anche in questo caso un valore che può andare da 0 a 1: più è alto, più il testo è denso).

24. È particolarmente delicato il trattamento della forma *che*, che gli strumenti automatici non disambiguano nei suoi diversi valori. Qui abbiamo disambiguato manualmente i casi in cui *che* è proforma relativa da quelli in cui è congiunzione che introduce una completiva (ad esempio in frasi come "Possiamo osservare che...").

tettura informativa, la lunghezza di parola e di frase, la complessità morfosintattica e molte altre variabili sono tutti elementi che cooperano in modo inscindibile a rendere un testo più o meno complesso. È però innegabile che l'essere confrontati con un lessico vario, cioè con tante parole diverse, oppure trovarsi di fronte a parole ripetute più volte sono situazioni che possono incidere sulla leggibilità di un testo (Bowers, 2000); vediamo, dunque, come evolve questa misura nei sub-corpora al crescere della scolarità. Prima, però, è doveroso fare una precisazione su questa misurazione, e cioè che la *ricchezza lessicale* è sensibile alla lunghezza dei testi (decrese automaticamente all'aumentare della lunghezza dei testi in esame); pertanto, per ricavare un dato non inficiato in questo senso, sono state effettuate misurazioni su un campionamento selezionato (cioè su porzioni di testo costituite da un numero limitato di 100 *token*, nello specifico le parti iniziali in cui comincia la trattazione teorica), mostrate in **Tabella 8**. Ciò, ovviamente, non esclude che, se si esaminassero altre parti, il dato potrebbe essere almeno in parte differente, a seconda del contenuto più o meno vario. Si tratta insomma di valori da considerare in modo puramente indicativo.

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
<i>Ricchezza lessicale media</i>	0,61	0,63	0,66	0,69	0,72	0,68	0,64

Tab. 8 - La *ricchezza lessicale* (TTR) media in verticale.

Tutti questi indici di *ricchezza lessicale* alti sono lontani dal discorso comune (che, ricordiamo, in genere non supera lo 0,3-0,4) e ci dicono una cosa importante, e cioè che già agli allievi più piccoli il tema *poligoni* è proposto tramite una trattazione breve, ma lessicalmente molto ricca, in cui cioè compaiono molte parole diverse, ciascuna un numero piuttosto basso di volte. Insomma, per quanto complessivamente i testi per i ragazzi più grandi contengano ovviamente un numero superiore di lemmi diversi, la ricchezza misurata su parti comparabili fa capire come già ai bambini più piccoli siano proposti numerosi vocaboli diversi in poco testo. Questo conferma che l'enunciazione sintetica della matematica è lessicalmente molto varia sin dai primi anni di scolarità, cosa che fa riflettere sul peso cruciale della componente lessicale nell'affrontare argomenti matematici.

7.3.2 Densità lessicale

Anche la *densità lessicale* (come spiegato in De Mauro *et al.*, 1993) è uno degli indici che mostrano un possibile elemento di complessità testuale, in una scala che

va da 0 a 1: maggiore è la presenza di parole piene, maggiore sarà il valore di *densità lessicale*, che riflette una semantica ricca di informazioni a carico del destinatario.

	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
<i>Densità lessicale media</i>	0,65	0,63	0,59	0,61	0,58	0,57	0,54

Tab. 9 - La *densità lessicale* media in verticale.

Anche in questo caso, l'evoluzione verticale dei sub-corpora rivela il mantenersi di livelli di *densità lessicale* elevati, com'è normale aspettarsi in un testo scritto di tipo scientifico, con grande incidenza *nominale*²⁵. La *densità* può derivare da varie cause: pensando in particolare alle classi inferiori della primaria, una causa significativa per le nostre osservazioni può essere la semplicità delle strutture sintattiche dei testi, che porta ad avere meno parole funzionali (in particolare meno connettivi, **par. 7.3.3**). Dalle misurazioni si ricava, quindi, che, complessivamente, i testi scolastici di geometria per gli allievi più giovani non solo sono particolarmente ricchi e variati sul piano lessicale, ma sono anche lessicalmente *densi*, cioè contenenti molte parole piene sul totale delle parole; parole portatrici soprattutto di contenuto geometrico, eccetto qualche riferimento al reale o qualche digressione (etimologica, storica, narrativa). Al crescere della scolarità, pur mantenendosi a livelli alti, si verifica un progressivo calo della *densità lessicale* dovuto proprio alla presenza di frasi più articolate e ricche di parole funzionali che le strutturano (connettivi e preposizioni). La complessità, quindi, non sarà più da considerarsi solo in termini di carico di parole piene, ma anche in termini di maggiore articolazione sintattica.

7.3.3 Quantificazione e distribuzione delle parti del discorso

La quantificazione e la distribuzione delle parti del discorso permettono di ricavare ulteriori informazioni sul tipo di parole (cioè sulle categorie grammaticali alle quali appartengono) più diffuse nei testi, cosa che consente di specificare ancora meglio le caratteristiche linguistiche del corpus. Se al paragrafo precedente abbiamo osservato l'incidenza globale delle parole piene, in **Tabella 10** possiamo osservarne la presenza in dettaglio.

²⁵. In genere, l'oralità è meno densa della scrittura (De Mauro *et al.*, 1993; Halliday, 1992; Lavinio, 2004; Voghera, 2010), poiché in essa l'informazione è più diluita e supportata da elementi non verbali e intonativi, e lo sono anche i testi scritti più informali.

Parte del discorso	II SP	III SP	IV SP	V SP	I SSPG	II SSPG	III SSPG
Sostantivi	1'045 ²⁶ (33,80%)	4'197 (36,85%)	21'107 (35,38%)	16'712 (35,50%)	44'628 (34,47%)	31'479 (33,68%)	2'161 (32,48%)
Verbi	482 (15,59%)	1'909 (16,76%)	9'970 (16,71%)	8'374 (17,79%)	21'471 (16,1%)	13'406 (14,35%)	958 (14,40%)
Aggettivi	365 (11,80%)	841 (7,38%)	5'452 (9,14%)	5'269 (11,19%)	12'541 (9,41%)	7'368 (7,88%)	531 (7,98%)
Avverbi	68 (2,20%)	205 (1,80%)	925 (1,55%)	576 (1,22%)	2'336 (1,75%)	1'197 (1,28%)	77 (1,16%)
Connettivi	115 (3,72%)	388 (3,41%)	2'486 (4,17%)	1'785 (3,79%)	6'475 (4,86%)	4'555 (4,87%)	343 (5,16%)

Tab. 10 - Distribuzione quantitativa delle parti del discorso più significative nel corpus italiano, in verticale classe per classe.

In generale, si conferma l'alta incidenza dei sostantivi rispetto ai verbi in modo costante lungo tutta la scolarità, con tre picchi percentuali in III, IV e V primaria, anni in cui vengono dati molti nomi matematici²⁷. Non a caso, in questi tre sub-corpora cresce leggermente anche il numero di aggettivi; questi sono in gran parte tipici del testo matematico: *stesso, uguale, regolare, congruente, interno, opposto, parallelo, perpendicolare, grande, minore, relativo, diverso, obliquo, inverso, esterno* sono i 15 più diffusi nell'intero corpus, anche se non tutti sarebbero consigliabili per la didattica della disciplina²⁸. Permangono inoltre bassi i valori degli avverbi, con pochi *type* altamente ripetuti (*poi* è il più ricorrente nei sub-corpora della primaria, e *anche* e *sempre* in quelli per la secondaria), così come quelli dei connettivi, che crescono lentamente fino alla II e alla III secondaria di primo grado, con una lieve flessione in V.

Se poi ci si sofferma non solo sulla categoria grammaticale, ma anche sulle caratteristiche delle forme verbali, è possibile rilevare che l'indicativo presente fra i modi finiti copre oltre l'80% delle forme attestate nel corpus: cosa che conferma la caratteristica di *atemporalità* della matematica, che si colloca così in un presente senza tempo effettivo²⁹. Altro dato significativo riguarda le forme con *si* impersonale (del tipo *si calcola*³⁰) e quelle pronominali (in riferimento specifico al verbo

²⁶. Questi sono i valori dei *token*, cioè delle occorrenze.

²⁷. Lo studio di Corno e Janner (2009) conferma che quest'*alta incidenza nominale* contrasta con le naturali abitudini espressive dei bambini, che tendono spontaneamente a fare un uso maggiore dei verbi.

²⁸. Si veda il caso di *obliquo* ripreso ai paragrafi 7.4.2 e 8.2.2.

²⁹. Per confronto, nell'italiano parlato le forme del presente indicativo si attestano mediamente su percentuali fra il 50% e il 60% (De Mauro *et al.*, 1993, p. 106).

³⁰. 14 *dicesi* sono attestati nei sub-corpora per la secondaria di primo grado.

intransitivo pronominale *chiamarsi*, che si realizza nei frequenti *si chiama/chiamano*), che rappresentano il 7,8% delle occorrenze verbali del corpus.

Per quanto riguarda i modi indefiniti (o forme nominali del verbo: gerundio, infinito, participio presente e participio passato), la loro presenza offre una significativa conferma della tendenza dei testi alla *deagentivizzazione*. In II e III primaria, si contano 90 gerundi, 20 infiniti, 36 participi passati (in costrutti come *Il confine formato*, *Lo spazio delimitato*³¹) e solo 2 participi presenti (l'aggettivo *confinante*, nel corpus di III primaria); nei testi di IV e V primaria, si contano 560 gerundi, 556 participi passati e ben 410 participi presenti, in forma di aggettivi stabilizzati e lessicalizzati (in particolare *congruente/-i* ed *equivalente/-i*; si ha una sola occorrenza di *avente*); infine, nei sub-corpora di scuola secondaria di primo grado si contano 1'756 gerundi, 738 participi passati e ben 588 participi presenti (sempre in forma di aggettivi ricorrenti, fra cui spicca *equidistante*, e con un picco di *passante*, presente in 78 occorrenze, e di *avente*, attestato ben 288 volte: questa forma, presente una sola volta nei testi per la primaria, si configura, così, come peculiare dello stile dei testi solo a partire dalla secondaria di primo grado).

7.4 Particolarità del lessico del testo scolastico di geometria: casi specifici

I vocaboli di un testo ci dicono molto sulla sua semantica: sono una delle chiavi necessarie per entrare nei contenuti. Per approfondire alcuni casi d'interesse specifico, i rilievi automatici offrono importanti risorse utili alla ricerca e alla didattica, in quanto permettono di sostenere con solide basi quantitative le impressioni e le osservazioni. Vediamo, quindi, alcuni esempi di indagine orientati a osservare alcune parole e associazioni di parole d'interesse nella globalità del corpus.

7.4.1 Le associazioni di parole con il termine poligono/-i

Un tipo di indagine interessante da realizzare tramite il trattamento automatico dei dati linguistici è quella delle associazioni di parole, che permette di ricavare una sorta di fotografia (qui in **Figg. 2 e 3** in forma di diagramma radiale) delle parole piene, dunque delle informazioni, più frequentemente associate nei testi a una certa parola. Data la centralità del tema, riportiamo in **Figura 2** a titolo di esempio i diagrammi delle associazioni con *poligono* e *poligoni* nel sub-corpus di scuola primaria del corpus DFA-Italmatica:

31. Non sono stati considerati in questo conteggio i participi passati parte di forme verbali composte, espresse esplicitamente per intero (come *ha disegnato*).

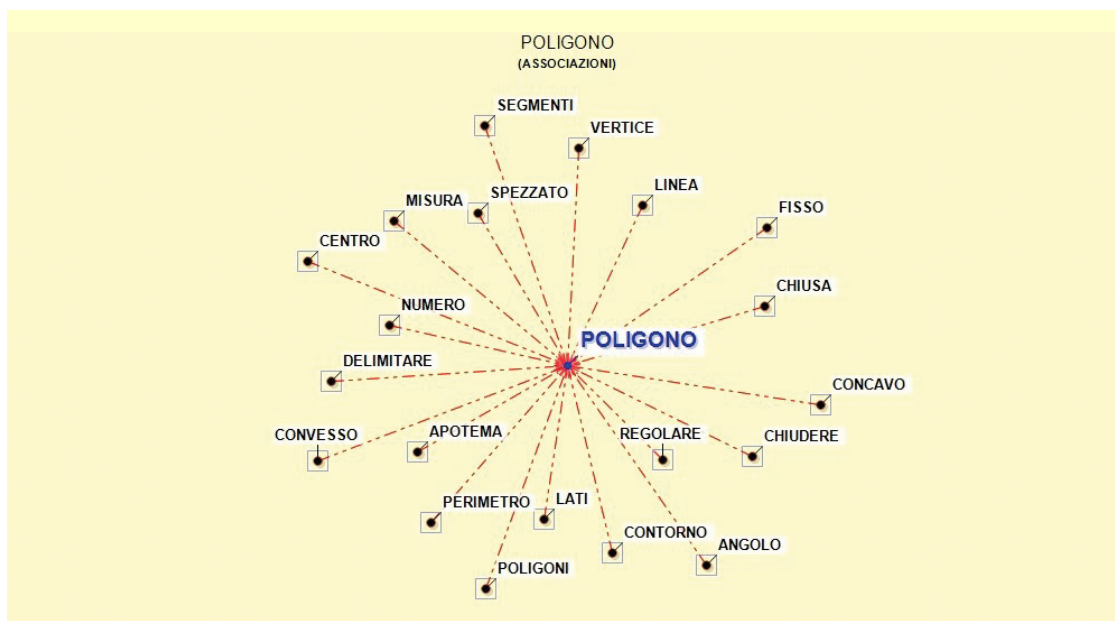


Fig. 2 - Le associazioni di parole con *poligono* nel sub-corpus di scuola primaria.

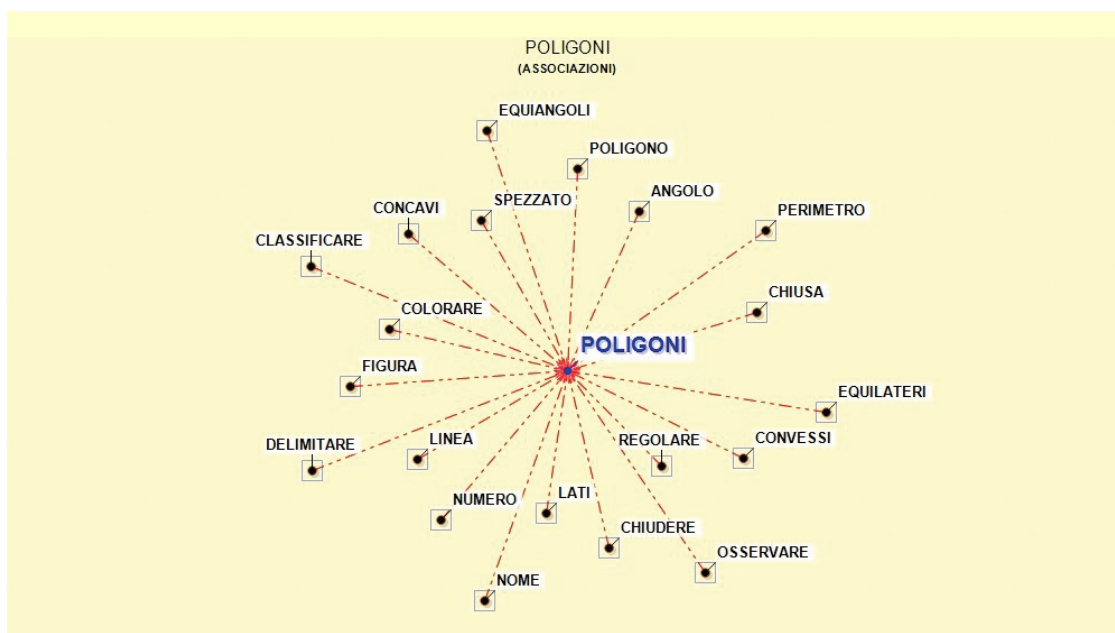


Fig. 3 - Le associazioni di parole con *poligoni* nel sub-corpus di scuola primaria.

Queste immagini danno il quadro semantico delle principali informazioni che gli allievi di primaria, nei loro testi, trovano associate a *poligono/-i*, cosa che può

essere interessante per una riflessione relativa ai contenuti che vengono proposti nei libri di testo, a livello di trattazione e di scelte lessicali, anche in prospettiva di un'osservazione verticale delle scelte didattiche; le **Figure 4 e 5** mostrano le associazioni con *poligono/-i* nei sub-corpora di secondaria di primo grado:

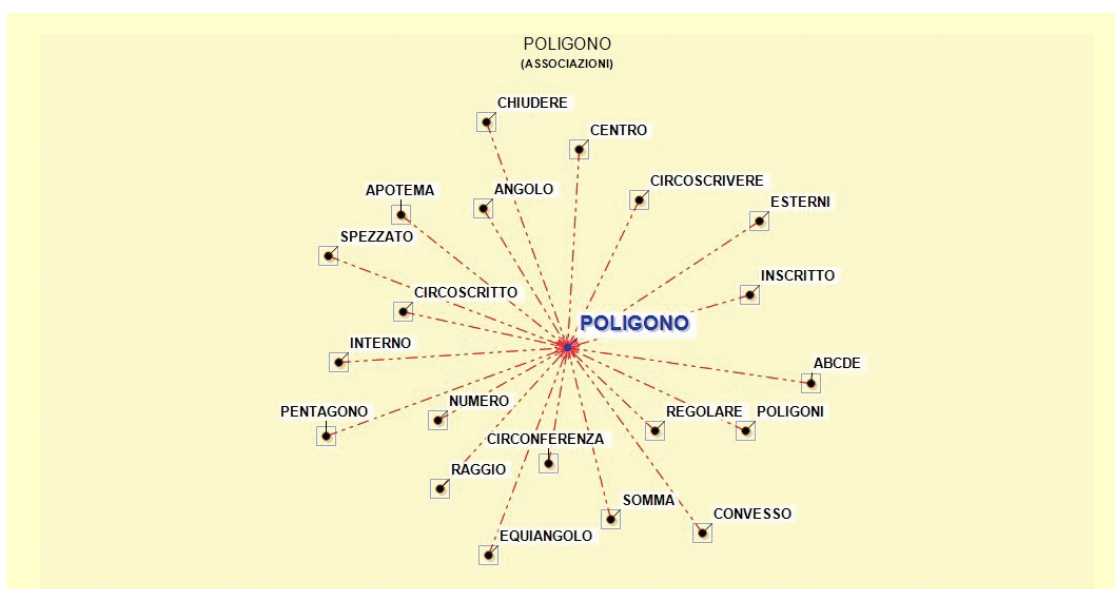


Fig. 4 - Le associazioni di parole con *poligono* nel sub-corpus di scuola secondaria di primo grado.

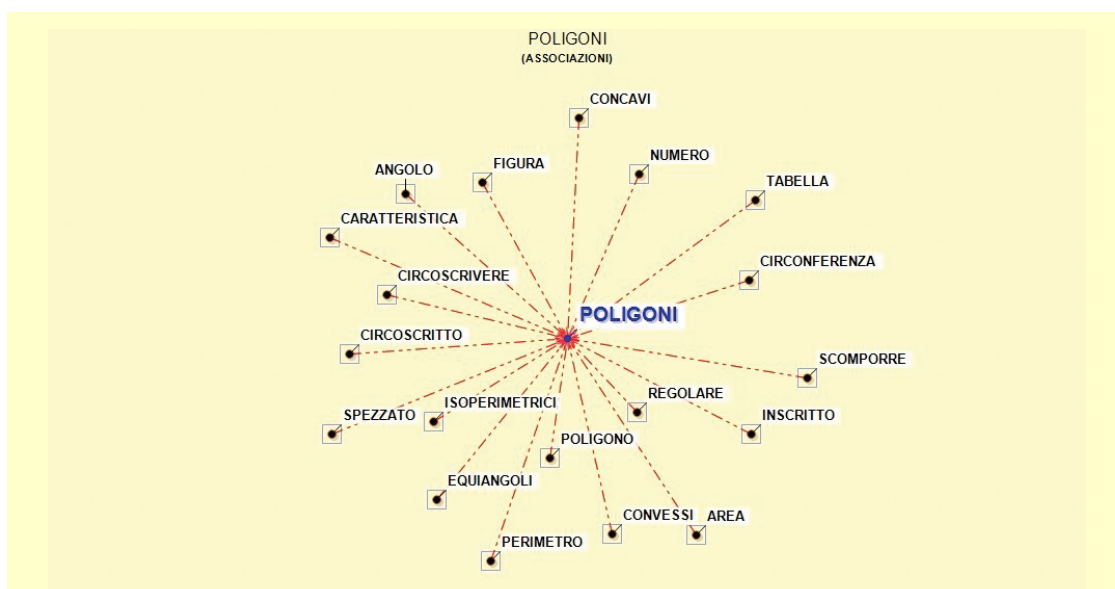


Fig. 5 - Le associazioni di parole con *poligoni* nel sub-corpus di scuola secondaria di primo grado.

Si può ad esempio notare che non compaiono più lemmi verbali come *classificare*, *colorare*, *osservare* (che quindi sono meno presenti in co-occorrenza con il lemma posto al centro), mentre compaiono sostantivi e aggettivi prima assenti, come *circoscritto*, *inscritto*, *area*, *isoperimetrici* ed *equiangoli*. Simili associazioni di parole danno una panoramica anche visiva dell'evoluzione dei temi toccati trattando i *poligoni* nel corso della scolarità, in un crescendo di tecnicismo e specificità.

7.4.2 Tecnicismi superflui e parole che ingannano: dati quantitativi su alcuni casi

I termini specialistici, componente fondamentale delle lingue delle discipline, servono davvero sempre? Come abbiamo visto, la geometria è dotata di un bagaglio lessicale sviluppatosi nei secoli, fatto di intersezioni con la lingua comune, di risemantizzazioni³², di terminologia in cui molti tecnicismi presentano anche altre accezioni nella lingua dell'uso. Oltre ai termini necessari, però, in didattica vi sono anche parole che potremmo chiamare "pseudo-matematiche", sedimentate nei testi e nel discorso scientifico pedagogico, senza autentica ragione disciplinare; potremmo addirittura parlare di "non-parole", cioè di parole o locuzioni non proprie del lessico specialistico della matematica, ma introdotte in conseguenza della trasposizione didattica abituale (Demartini & Sbaragli, 2019a). Qui di seguito mostreremo brevemente alcuni dati quantitativi relativi a una selezione di parole dallo statuto ambiguo, tra le diverse possibili, che verranno ulteriormente commentate tramite esempi puntuali nel capitolo successivo. Si tratta di sostantivi e aggettivi, e di collocazioni specifiche di essi; solo come ultimo caso ci soffermeremo su alcuni verbi di movimento, che conferiscono alla trattazione geometrica un particolare aspetto dinamico.

Non poligono. Il sostantivo negato *non poligono*³³ è ricorrente in didattica quando si presenta il concetto di *poligono*, designando una categoria "in negativo" non esistente né necessaria. Esso non è mai attestato nel sub-corpus grigionese e lo è solo 3 volte nel sub-corpus di I secondaria di primo grado ticinese; per contro, nel corpus italiano compare 21 volte in II primaria, 24 in III primaria, 16 in IV primaria, 4 in V primaria e mai nei sub-corpora per la secondaria di primo grado. Questi dati ci fanno capire che la prassi d'uso sia diffusa nei primi anni di scolarità, come se per spiegare che cos'è qualcosa fosse utile istituire comunque una categoria complementare (e darle un'etichetta linguistica).

32. È il processo tramite il quale una parola comune assume un particolare significato in un ambito specialistico, spesso grazie a processi metaforici (celebri sono i casi in fisica di *corrente*, *campo* o *momento*); per quanto concerne la geometria, il caso citato da Gualdo e Telve (2011, p. 81) è *base*, che è fonte anche di numerose misconcezioni nella mente degli allievi (Sbaragli, 2012).

33. Ne avevamo già quantificato la presenza negli enunciati di tipo *definizione* (par. 6.2.2.3).

Base. Il termine *base* suona alle orecchie dei non esperti come assolutamente tipico e imprescindibile in un testo di geometria; tipico sì (nel senso che la sua circolazione in didattica è altissima), imprescindibile no, in quanto istituisce e lessicalizza un ente (appunto la *base*) che non ha ragione geometrica d'essere per come viene spesso proposto, in quanto presentato come un *lato* se si parla di figure piane o *faccia* se si parla di figure dello spazio vincolate a una posizione, cosa per nulla consigliabile nell'insegnamento della geometria (Sbaragli, 2005; 2009). Il fatto che sia al 24° posto nella lista di tutti i lemmi nel corpus italiano con ben 3'046 occorrenze mostra, però, come i libri di testo abbiano fatto proprio questo termine, contribuendo alla sua circolazione e al suo affermarsi in didattica. Gli anni in cui ricorre maggiormente sono la V primaria (nel cui sub-corpus è all'8° posto, con 509 occorrenze), la I secondaria di primo grado (nel cui sub-corpus è al 9° posto, con 836 occorrenze), e la II secondaria di primo grado (nel cui sub-corpus è all'8° posto, con 755 occorrenze). Tale lemma, che compare in 86 occorrenze nel sub-corpus ticinese, è, stranamente, una parola *hapax* nel sub-corpus grigionese: compare, cioè, una sola volta.

Altezza come segmento di perpendicolare. Raro ma interessante è il caso della co-occorrenza di *altezza* e *segmento di perpendicolare*, attestata 12 volte nel sub-corpus di I secondaria di primo grado e 2 in quello II secondaria di primo grado del corpus italiano; mai nel corpus svizzero. Il problema, qui, è duplice: si considera l'*altezza* come un segmento e non come una grandezza e la locuzione *segmento di perpendicolare* omette il fatto che la perpendicolarità sia una relazione, presentandosi, piuttosto, come un oggetto in sé.

Misura del perimetro. Una ridondanza lessicale molto comune, che adombra una imprecisione disciplinare, è quella di abbinare *misura* a *perimetro* nella locuzione *misura del perimetro*, quando *perimetro* è già stato definito come "misura del contorno": *misura del perimetro* equivarrebbe letteralmente a "misura della [misura del contorno]". Il termine (che etimologicamente contiene, non a caso, la parola *misura*) basta già in sé per dare il nome preciso a una grandezza. Le ricerche automatiche ci permettono di rilevare la frequenza di questa combinazione: essa compare 1 volta nei testi di II primaria, 4 volte in quelli di III, 20 volte in quelli di IV, 14 in quelli di V, 9 in quelli per la I secondaria di primo grado, 3 volte in quelli per la II e 5 in quelli per la III (mai nel corpus svizzero).

Obliquo, orizzontale, verticale. Anche questi aggettivi, apparentemente privi di implicazioni inopportune, in certi contesti geometrici risultano invece inadeguati (ad esempio per parlare della posizione di enti come *lato* o *lati* e *diagonale* o *diagonali*), in quanto vincolano la descrizione di una figura a una certa posizione

convenzionale, che non ha alcun valore matematico, rafforzando nella mente degli allievi misconcezioni e fraintendimenti (Demartini & Sbaragli, 2019b; Sbaragli, 2009). Eppure, l'uso massiccio nella manualistica è corrente e i testi del corpus lo confermano (soprattutto l'uso di *obliquo*): nel sub-corpora di IV primaria compaiono 4 volte *orizzontale* e *verticale*, ma 112 *obliquo*; in quello di V 1 volta *verticale* e 67 *obliquo*; 4 volte *orizzontale* e *verticale*, ma 112 *obliquo*; in quello per la I secondaria di primo grado 2 volte *orizzontale* e ben 319 volte *obliquo*; in quello per la II secondaria di primo grado 1 volta *orizzontale* e ben 36 volte *obliquo*. Per contro, tale aggettivo non compare mai nel corpus grigionese e 4 volte in quello ticinese (in cui però non compaiono mai *orizzontale* e *verticale*, attestati invece 3 volte ciascuno nei testi grigionesi).

A due a due. La locuzione avverbiale polirematica *a due a due* compare per lo più in co-occorrenza con *parallelogramma* (più di rado con *rettangolo* e *rombo*) e ha il limite di essere usata come se fosse esaustiva, mentre, per contro, tace un elemento fondamentale: esplicitare quali enti, ad esempio *lati*, devono essere considerati *a due a due* della stessa lunghezza (paralleli o opposti?) per avere un *parallelogramma*, omettendo dunque una precisazione necessaria. Nel corpus italiano quest'espressione compare, senza ulteriori specifiche, per 2 volte nel sub-corpus di III primaria, 31 volte in quello di IV, 30 in quello di V, 44 volte in quello di I secondaria di primo grado e 26 volte in quello di II; è attestato, poi, 12 volte nel corpus ticinese e mai in quello grigionese.

Verbi d'azione e movimento. Un'ultima considerazione la meritano i verbi che potremmo genericamente definire d'azione e di movimento: verbi, cioè, che contrastano con l'impressione di staticità e immobilità del discorso matematico. Anche su questi verbi verranno ancora proposte osservazioni qualitative nel **capitolo 8**: intanto, è sufficiente individuarne i tipi e i contesti d'uso principali, e l'impatto d'insieme. Innanzitutto va fatta un'importante distinzione, cioè quella tra verbi di azione che riguardano il lettore, chiamato ad agire sul testo – ne abbiamo mostrati in **Tabella 5** tra i lemmi verbali di rango alto: *colorare*, *ripassare*, *indicare*, *scrivere*, *misurare*, *disegnare*, ma sono attestati anche *andare*, *appoggiare*, *cercare*, *completare*, *compilare*, *congiungere*, *costruire*, *disporre*, *percorrere*, *ritagliare*, *scegliere*, *segnare*, *sottolineare*, *tracciare*, *unire*³⁴, tanto più frequenti quanto più nei testi ci sono macroatti *direttivi* e *logico-argomentativi* di tipo *fare* o *immaginare* –, e quelli che, invece, conferiscono una sorta di dinamica e di movimento ai contenuti

³⁴. Vi sono poi verbi che identificano azioni propriamente matematiche, come *calcolare*, *sommare*, *sottrarre*, *moltiplicare*, *dividere* e anche *risolvere*, in co-occorrenza preferita con *problema* o *esercizio*, presente a partire dalla III primaria.

geometrici presentati, come, per citare un caso emblematico, il verbo *uscire* in un contesto come “la bisettrice di un triangolo, relativa a un angolo, è il segmento che unisce un vertice con il lato opposto e divide a metà l’angolo da cui esce” (su questi casi si tornerà al **par. 8.2.2**).

I principali verbi dell’intero corpus che rendono questa sorta di personificazione degli enti geometrici sono *andare* (3)³⁵, *appoggiarsi* (16), *cadere* (79), *incontrare/-rsi* (315), *partire* (4), *uscire* (56): distribuiti lungo tutta la scolarità, mostrano la preminenza del lemma *incontrare/-si*, assente nel sub-corpus di II primaria e particolarmente ricorrente (167 occorrenze) in quello di I secondaria di primo grado. Sono infatti comunissime espressioni come “Un poligono si può circoscrivere a una circonferenza se le bisettrici di tutti i suoi angoli si incontrano in un unico punto...” e “La circonferenza incontra il triangolo in ciascun vertice...”. Tale lemma, diversamente dagli altri, è segnalato nel *Grande dizionario italiano dell’uso* da De Mauro (1999) come portatore anche di un significato tecnico-specialistico (TS) in geometria (sinonimo di *intersecarsi*, più specifico dell’ambito geometrico, che compare 165 volte nell’intero corpus, quasi esclusivamente nei testi per la secondaria di primo grado). La scelta del verbo *incontrarsi*, invece, è, in genere, molto apprezzata dagli allievi più giovani, in quanto è un verbo evocativo di situazioni di vita reale, fatte proprio di incontri e di scontri: cosa che rende il tecnicismo e gli enti coinvolti più vicini ai lettori.

7.4.3 I connettivi consecutivi

Non solo le parole piene sono interessanti nel testo matematico; un ultimo aspetto utile da monitorare in modo specifico riguarda i *connettivi* e in particolare quelli *consecutivi*. Questi sono una categoria di interesse peculiare nella costruzione del testo scientifico in quanto marcano in forma esplicita lo snodarsi e il collegarsi del ragionamento nella costruzione logico-argomentativa del testo: infatti, «Si ha una relazione di consecuzione quando un’affermazione, un’ipotesi, un giudizio, una domanda, un ordine risultano da quanto precede grazie a un ragionamento di carattere inferenziale che collega premesse e conclusione» (Ferrari, Lala, & Zampese, 2021, p. 110). Come si è visto dalle misurazioni lessicometriche precedenti, i *connettivi* (in forma di parola singola o di locuzione) ricoprono una percentuale bassa tra le parti del discorso presenti nei libri a conferma della tendenza dei testi a privilegiare un discorso spesso giustapposto in cui le proposizioni sono accostate senza legami formali e in cui molti rapporti logici restano impliciti a carico di chi legge; tra le forme di collegamento domina nell’intero corpus la relazione di aggiunta marcata

35. Tali numeri sono quelli delle occorrenze in cui questi verbi sono abbinati a enti geometrici e non usati in altri contesti.

dalla e con 10'440 occorrenze. Vediamo però più dettagliatamente i *connettivi* più frequenti sub-corpus per sub-corpus, con focus specifico sui *consecutivi* (Tab. 11).

	Corpus italiano		Corpus svizzero			
	I 6 <i>connettivi</i> più frequenti	<i>Connettivi consecutivi</i>	I 6 <i>connettivi</i> più frequenti ³⁶		<i>Connettivi consecutivi</i>	
II SP	e; o; se; cioè; perché; oppure, ma ³⁷	quindi: 2	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> e	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> nessun connettivo consecutivo
III SP	e; o; perché; cioè; se; ma	quindi: 5	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> e; ma	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> nessun connettivo consecutivo
IV SP	e; o; se; cioè; ma; perché	quindi: 97 dunque: 10 perciò: 36 allora: 6 per questo: 2 di conseguenza: 2 per questo motivo: 2	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> e; se; o, finché ³⁸	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> nessun connettivo consecutivo
V SP	e; o; se; perché; cioè; oppure	quindi: 50 dunque: 7 perciò: 31 allora: 12 per questo: 4 di conseguenza: 3 per questo motivo: 2	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> e; se	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> nessun connettivo consecutivo
VI SP	-	-	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> e; oppure; se; sia... sia...; perché; quindi	<i>Sub-corpus TI</i> -	<i>Sub-corpus GR</i> quindi: 1
I SSPG	e; se; o; quindi; che; perché	quindi: 420 dunque: 47 perciò: 28 allora: 125 per questo: 16 di conseguenza: 23 pertanto: 75 ne consegue che: 11 da ciò si deduce che (scaturisce che, risulta chiaro che): 5 per tale ragione: 3 per questo motivo: 3	<i>Sub-corpus TI</i> e; ma; se; perché; o; cioè	<i>Sub-corpus GR</i> e; oppure; o, perché; se; sia... sia..., bensì ³⁹	<i>Sub-corpus TI</i> quindi: 10 dunque: 3 perciò: 2 allora: 8 di conseguenza: 4	<i>Sub-corpus GR</i> nessun connettivo consecutivo



³⁶. Nei sub-corpora più piccoli, come quelli grigionesi fino alla V primaria, possono anche esserci meno di 6 tipi di *connettivi* (sono indicati tutti quelli attestati).

³⁷. A parità di occorrenze si riportano più lemmi separati da virgola invece che da punto e virgola.

³⁸. *O* e *finché* compaiono una sola volta (ricordiamo che si tratta di sub-corpora di dimensioni molto ridotte).

³⁹. *Sia... sia...* e *bensì* compaiono una sola volta (ricordiamo che si tratta di sub-corpora di dimensioni molto ridotte).

II SSPG	e; se; o; perché; quindi; cioè	quindi: 302 dunque: 41 perciò: 37 allora: 66 per questo: 7 di conseguenza: 27 pertanto: 80 ne consegue che: 11 per questo motivo: 7 da ciò ricaviamo: 1	<i>Sub-corpus TI</i> e; o; se; cioè; ma; sia... sia...	<i>Sub-corpus GR</i> -	<i>Sub-corpus TI</i> quindi: 4 dunque: 5 perciò: 3 allora: 3 di conseguenza: 3 pertanto: 2	<i>Sub-corpus GR</i> -
III SSPG	e; se; cioè; che; perché; quindi	quindi: 40 allora: 9 pertanto: 4	<i>Sub-corpus TI</i> e; se; per- ciò; ma; o; sia... sia...	<i>Sub-corpus GR</i> -	<i>Sub-corpus TI</i> quindi: 9 perciò: 5 allora: 4	<i>Sub-corpus GR</i> -

Tab. 11 - I *connettivi* nel dettaglio con attenzione particolare ai *consecutivi*.

Questo prospetto mostra l'aumento delle relazioni *consecutive* segnalate da *connettivi* specifici dalla IV primaria, con un incremento ancora maggiore in I e in II secondaria di primo grado (in particolare a carico del lemma *quindi*): classi in cui il ragionamento e il discorso matematico si fanno più complessi e articolati. I *connettivi consecutivi* si possono trovare in frasi brevi come (1), in cui la conseguenza è proposta come strettamente geometrica (poiché le quattro figure sono equiscomponibili ne consegue che hanno la stessa area), oppure in porzioni di testo via via più complesse, come si può osservare negli esempi (2), (3) e (4), in cui i valori assunti dai connettivi hanno sfumature leggermente diverse:

(1) Queste quattro figure sono equiscomponibili; hanno quindi tutte la stessa area. (3_7, p. 4)

(2) In ogni poligono, un angolo interno e un angolo esterno aventi lo stesso vertice sono adiacenti e quindi **supplementari**, cioè la loro somma è 180°. (1_6, p. 522)

(3) Se il poligono ha n lati e quindi n vertici: da ogni vertice possiamo tracciare $(n - 3)$ diagonali; non dobbiamo considerare due volte le diagonali che hanno per estremi gli stessi vertici (AC e CA; DB e BD; ...). Quindi il numero totale di diagonali (dt) di un poligono di n lati si ottiene moltiplicando n per $(n - 3)$ e dividendo il risultato per 2: **dt = $n \times (n - 3)/2$** . (14_6, p. 622)

(4) Ne consegue che gli angoli sono a due a due congruenti e quindi sono tutti congruenti fra di loro (**figura 7**). Pertanto: PROPRIETÀ. Un triangolo equilatero ha i tre angoli congruenti e avendo anche i lati congruenti si può quindi dir che è un **poligono regolare**. (8_6, p. 147)⁴⁰

40. Questo passaggio compare identico nel volume 16_6, p. 207, della stessa casa editrice.

Basta leggere le parti contenenti *quindi* per cogliere le sottili differenze tra i legami che questo connettivo istituisce: un conto è una *relazione consecutiva* tra aspetti propriamente matematici immediatamente conseguenti l'uno dall'altro, un altro è una *relazione di conseguenza* che lega parti di testo più vaste e articolate (si veda ad esempio il *Quindi* a inizio frase dell'esempio (3), che introduce una conseguenza a tutta la corposa parte precedente). È evidente che, al crescere della scolarità, la presenza di simili *connettivi* avvicina il testo matematico per la scuola ai modi tipici della concatenazione di ragionamento tipica di certa argomentazione, che tende alla dimostrazione propria della disciplina; ciò si nota particolarmente nell'esempio (4), in cui su 41 parole (considerando le polirematiche *ne consegue che* e *a due a due*) si trovano ben 4 forme di *connessione consecutiva*. Se il lettore non ha un sufficiente bagaglio lessicale relativo a questi *connettivi* o non gli è chiara la funzione logico-compositiva che hanno, un simile passaggio potrebbe risultare davvero oscuro nei suoi collegamenti. Inoltre, anche se la semantica dei connettivi fosse chiara, resterebbe il problema di una relazione logica pesante dal punto di vista cognitivo, ricca di componenti implicite e fortemente concatenata: si è appena tratta una conclusione, e quella diventa immediatamente la premessa di un ulteriore legame di consecuzione.

7.5 Il lessico della geometria nella prospettiva di un piano di alfabetizzazione lessicale

Per quanto concerne la lingua speciale della geometria, i rilievi mostrati in questo capitolo hanno restituito solo in minima parte la reale complessità della questione del lessico nel testo scolastico, che oscilla tra autentiche necessità disciplinari e prassi didattiche ricorrenti e consolidate, sebbene non sempre legittime. Se ne ricava una fotografia che mostra i testi matematici in tutta la loro (sovr)abbondanza terminologica, costante sin dalla scuola primaria, a carico soprattutto dei sostantivi, nel quadro di una sintassi che si fa più articolata e ipotattica al progredire della scolarità. Testi lessicalmente ricchi e densi, caratterizzati da bassi indici di leggibilità e in cui l'incidenza del Vocabolario di Base è ridotta, a fronte di moltissimi tecnicismi. Questo, in sé, non può essere un elemento di condanna, ma va analizzato attentamente per i suoi rischi potenziali in ambito scolastico, sulla scia di quanto espresso da La Grassa e Troncarelli (2014, p. 296):

Il lessico tecnico specialistico all'interno dei testi non deve essere letto come un fattore di per sé negativo: è auspicabile infatti che gli studenti possano sviluppare una competenza lessicale che vada ben oltre la conoscenza delle parole più comuni. È opportuno tuttavia considerare che la presenza di questo tipo di lessico può dare esiti diametralmente opposti: se l'apprendente è lasciato da solo

a misurarsi con il testo, tale presenza può tradursi in un ostacolo difficilmente sormontabile, tanto da compromettere seriamente la comprensione e, di conseguenza, l'accesso ai contenuti disciplinari.

Oggi chi insegna deve gestire la sfida del lessico disciplinare – una sfida tutto sommato “classica”, per la didattica – in un panorama di sempre maggiore complessità: allievi il cui patrimonio lessicale sembra presentare sempre maggiori criticità e lacune⁴¹, ma anche allievi non madrelingua, per i quali la lingua di scolarizzazione non coincide con la lingua prima. In un simile quadro, deve comunque svilupparsi anche un lavoro profondo e critico sulle parole delle discipline, che è parte integrante di un efficace piano di alfabetizzazione lessicale da promuovere in classe (Ferrerri, 2005). Per poterlo affrontare, il docente per primo dovrebbe acquisire una crescente sensibilità e attenzione agli elementi di criticità che si annidano fra le parole, anche a quelli non subito evidenti. Proprio per questo sono utili lavori che esplorino le caratteristiche lessicali dei testi proposti a scuola a bambini e ragazzi, che riprendano e si collochino sulla scia dell'indagine di Marconi *et al.* (1994).

Per quanto concerne il testo scolastico di matematica, uno dei primi nodi di riflessione è la grandissima quantità di vocaboli specialistici presenti, che, in gran parte, appartengono non solo alla dimensione manualistica della lingua della disciplina, ma più in generale alla prassi della comunicazione disciplinare in contesto didattico. Che siano termini monosemici o parole-termini con più accezioni nell'uso comune, è fondamentale che l'allievo riesca a focalizzare l'attenzione su di essi, passando principalmente dal vivere situazioni concrete ricche e varie, così da poterli immagazzinare un po' alla volta, con le loro specificità semantiche, partendo dall'esperienza. Le attività legate all'esperienza possono essere accompagnate, alla fine dei percorsi, dall'incontro con stimoli testuali chiari e coerenti, e da un'efficace attivazione della memoria (ad esempio tramite la costruzione di mappe semantiche o altri supporti, quali la creazione di un glossario dapprima più spontaneo e poi verificato per renderlo corretto); è inoltre molto utile, nei vari ordini di scolarità, far lavorare gli allievi sull'esplicitazione di possibili descrizioni e definizioni diverse di uno stesso ente matematico, così da evitare le misconcezioni concettuali e il radicarsi di espressioni ripetute ma non comprese, e talvolta anche errate: in questo senso, l'attività di riformulazione promuove la flessibilità e la riflessione profonda,

41. Per quanto non sia affatto semplice monitorare e quantificare la reale competenza lessicale degli studenti (in ricezione e in produzione: competenze che non sempre sono ugualmente sviluppate), è noto come molti studi, negli ultimi anni, abbiano insistito – con diversi gradi di criticità e basandosi su diverse scelte metodologiche nei rilevamenti – nel sottolineare la scarsità e la povertà del bagaglio lessicale degli allievi (si vedano ad esempio i recenti rilievi di Massimo Arcangeli sulle matricole universitarie: https://www.corriere.it/cultura/20_febbraio_19/massimo-arcangeli-dizionario-per-salvare-lingua-italiana-7298c85a-5342-11ea-a666-434a0f1b693a.shtml).

nonché l'esercizio attivo del lessico. La lingua si fa, così, strumento per l'apprendimento disciplinare e anche per il monitoraggio di esso da parte del docente.

Insomma, la sperimentazione attiva e variata, accompagnata dalla verbalizzazione di ciò che si sta vivendo, è un ingrediente chiave per promuovere l'arricchimento del lessico disciplinare: piste operative che difficilmente i libri scolastici di matematica propongono come suggerimenti. Infatti, mentre per alcuni elementi di collegamento con la realtà e di attenzione alle competenze la manualistica presenta tratti di rinnovamento, per quanto riguarda gli aspetti linguistici e specificamente lessicali si verifica un generale adagiarsi su modi tradizionali, comprensivi di scelte terminologiche e di stilemi sedimentati nel tempo.

Osservare più da vicino la natura dei vocaboli dei libri di matematica per la scuola e quantificarne la presenza nei testi è un primo passo per ripensare il quadro d'insieme delle parole disciplinari da proporre in contesto didattico, distinguendo le necessarie, dalle accessorie, dalle inopportune, e cogliendone le differenze. Ciò tenendo presente questa preziosa indicazione:

Far proprio un progetto di sviluppo lessicale comporta un cambio di prospettiva: dall'*imparare le parole* [...] si passa alle *parole per imparare*, alle parole enucleate per esplorare e capire i campi del sapere, al cui dominio si perviene per gradi con il formarsi e differenziarsi del sapere. (Ferrerri, 2005, p. 131)

Insomma, un progetto di sviluppo lessicale dovrebbe prevedere che i tecnicismi spesso faticosamente memorizzati accompagnassero i concetti e crescessero con essi; senza dimenticare l'apporto della lingua comune per quello che sempre Ferreri (2005, p. 133) chiama «lessico della conoscenza»: un insieme di parole non quotidiane ma diffuse, trasversali alle discipline, tipiche dei testi di studio, e vitali per comprenderli a fondo e acquisire conoscenza, come *dato*, *modello*, *spiegare*, *verificare* (per citare quattro esempi di lemmi presenti anche nel nostro corpus).

Certo, come ricordato in Lavinio (2018), la responsabilità linguistica dei docenti di tutte le materie non riguarda soltanto il lessico, che è solo una delle componenti in gioco nella testualità scientifica. Eppure, i docenti di tutte le materie dovrebbero ricordare che il lessico svolge un ruolo imprescindibile nell'elaborazione e nella fissazione dei concetti e delle conoscenze, e dovrebbero provare ad affrontarlo secondo modalità varie, ricche e non meccaniche, dapprima esperienziali e poi più formali per istituzionalizzare il sapere, al fine di aiutare gli allievi a raggiungere gli importanti traguardi della correttezza, della precisione e della chiarezza.

Analisi didattico-disciplinare dei libri di testo del corpus

Nel **paragrafo 4.3.3** sono stati esplicitati gli strumenti, i metodi e i criteri con cui è stata condotta l'analisi *didattico-disciplinare* dei libri di testo del corpus, il cui intento è far emergere dal punto di vista qualitativo, e solo in parte quantitativo, alcuni aspetti puntuali di criticità considerati in senso matematico, linguistico e didattico. In stretta continuità col **capitolo 7**, molti rilievi coinvolgeranno il lessico come tramite per la costruzione del sapere disciplinare.

Si è scelto di strutturare l'analisi secondo queste lenti di osservazione:

- *elementi concettuali*, in cui rientrano elementi non corretti o critici dal punto di vista dei concetti matematici in gioco;
- *elementi linguistici*, in cui rientrano gli aspetti linguistici che potrebbero rappresentare ostacoli alla comprensione del sapere;
- *elementi grafico-figurali*, in cui emergono alcune criticità legate a rappresentazioni grafiche o figurali poco efficaci, concettualmente errate o didatticamente fuorvianti.

Le criticità emerse in ciascuno di questi elementi sono state inoltre etichettate come inerenti al punto di vista matematico (cioè propriamente disciplinare) o a quello didattico (cioè a come la disciplina viene veicolata in contesto scolastico), ottenendo così la seguente tabella di analisi (**Tab. 1**):

	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico
Elementi concettuali		
Elementi linguistici		
Elementi grafico-figurali		

Tab. 1 - Griglia di analisi degli aspetti *didattico-disciplinari* rilevati nei libri di testo.

Dall'analisi del corpus DFA-Italmatica sono emersi 9'913 elementi, di cui 6'718 rientranti in criticità dal punto di vista matematico e 3'195 dal punto di vista didattico. Tali elementi sono così distribuiti tra corpus italiano (**Tab. 2**) e corpus svizzero (**Tab. 3**) in base alle diverse classi:

	Corpus italiano II-III SP		Corpus italiano IV-V SP		Corpus italiano I-II-III SSPG	
	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico
Elementi concettuali	136	149	1'771	279	2'638	264
Elementi linguistici	15	143	344	556	384	1'577
Elementi grafico-figurali	54	49	641	229	1'293	129
TOTALE	199	340	2'613	960	3'691	1'772

Tab. 2 - Presenza degli elementi concettuali, linguistici e grafico-figurali nei libri di testo italiani nei diversi anni di scolarità espressi in forma numerica.

	Sub-corpus ticinese I-II-III SSPG		Sub-corpus grigionese II-III-IV-V-VI SP e I SSPG	
	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico
Elementi concettuali	83	5	43	18
Elementi linguistici	14	59	18	12
Elementi grafico-figurali	44	25	13	4
TOTALE	141	89	74	34

Tab. 3 - Presenza degli elementi concettuali, linguistici e grafico-figurali nei libri di testo ticinesi e grigionesi nei diversi anni di scolarità espressi in forma numerica.

Nell'interpretare i dati numerici riportati in **Tabella 2** e **Tabella 3** va considerato che uno stesso estratto testuale può essere considerato critico per diversi aspetti, ad esempio dal punto di vista linguistico (rientrando così negli elementi linguistici) e dal punto di vista concettuale (rientrando dunque negli elementi concettuali). Dai risultati emerge come in tutti i livelli scolastici, sia nei libri di testo italiani sia in quelli svizzeri, le criticità a livello concettuale prevalgano sulle altre; inoltre, in questa categoria, dalla IV primaria in poi nei libri di testo del corpus italiano, e in tutti i libri di testo ticinesi e grigionesi del corpus svizzero, prevalgono le criticità considerate dal punto di vista matematico rispetto a quelle riconducibili al punto di vista didattico.

All'interno di ciascuna di queste categorie sono stati inoltre individuati alcuni fenomeni presenti in modo ricorsivo nei libri di testo dei vari livelli scolastici, che costituiscono le sottocategorie di analisi sulle quali abbiamo impostato la suddivisione dei vari paragrafi di questo capitolo. Di ciascuna di queste sottocategorie verranno forniti i dati quantitativi e alcuni esempi di criticità ricorrenti o particolarmente interessanti presenti nei libri di testo, senza distinguerli secondo la categorizzazione punto di vista didattico e matematico.

8.1 Elementi concettuali

All'interno di questi tipi di elementi sono stati evidenziati sette fenomeni che risultano interessanti da essere analizzati dal punto di vista sia matematico sia didattico. I sette fenomeni sono i seguenti:

- *scorrettezze o imprecisioni matematiche*: affermazioni che contengono inesattezze dal punto di vista matematico;
- *omissioni o impliciti*: informazioni mancanti o non esplicitate adeguatamente;
- *manca di coerenza del testo*: presenza di elementi contraddittori e incoerenti all'interno del testo;
- *esposizioni restrittive*: esempi limitanti, costruzioni vincolanti e restrittive, che risultano non adeguate a evidenziare la generalità di ciò che viene presentato;
- *ridondanze*: sovrabbondanza di informazioni la cui esplicitazione non è necessaria in quanto già contenute all'interno di una data espressione linguistica;
- *eccessiva casistica*: elencazione superflua di casi legati a una specifica affermazione o proprietà;
- *argomentazioni lacunose*: passaggi argomentativi poco chiari o non esplicitati, o in cui il percorso verso la generalizzazione avviene in modo brusco o sottinteso.

Tali fenomeni sono stati riscontrati nei libri di testo italiani¹ secondo la seguente distribuzione:

1. Si è scelto di effettuare questa analisi solo per il corpus italiano, in quanto risulterebbe poco significativa per il corpus svizzero: il sub-corpus ticinese è infatti composto da 7 libri di testo, per altro riferiti esclusivamente alla scuola secondaria di primo grado; il sub-corpus grigionese comprende unicamente 6 libri di testo, uno per anno di scolarità dalla II primaria alla I secondaria di primo grado, appartenenti tutti alla medesima collana.

	II-III SP		IV-V SP		I-II-III SSPG	
	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico
Scorrettezze o imprecisioni matematiche	56 (41,18%)	0 (0%)	484 (27,33%)	0 (0%)	620 (23,50%)	0 (0%)
Omissioni o impliciti	37 (27,21%)	106 (71,14%)	999 (56,41%)	123 (44,09%)	1'435 (54,40%)	78 (29,55%)
Mancanza di coerenza del testo	14 (10,29%)	6 (4,03%)	97 (5,48%)	53 (19,00%)	251 (9,51%)	39 (14,77%)
Esposizioni restrittive	0 (0%)	36 (24,16%)	20 (1,13%)	84 (30,11%)	24 (0,91%)	92 (34,85%)
Ridondanze	28 (20,59%)	1 (0,67%)	168 (9,49%)	0 (0%)	158 (5,99%)	0 (0%)
Eccessiva casistica	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	7 (2,51%)	0 (0%)	10 (3,79%)
Argomenta- zioni lacunose	1 (0,74%)	0 (0%)	3 (0,17%)	12 (4,30%)	150 (5,69%)	45 (17,05%)
TOTALE	136 (100%)	149 (100%)	1'771 (100%)	279 (100%)	2'638 (100%)	264 (100%)

Tab. 4 - Risultati quantitativi degli *elementi concettuali* rilevati nei libri di testo italiani.

Dai dati emerge che la sottocategoria *omissioni o impliciti* è quella più presente dalla IV primaria in poi, prevalentemente dal punto di vista matematico; seguono a livello quantitativo le *scorrettezze o imprecisioni matematiche*. Va anche osservato che alcune categorie meno frequenti, come l'*eccessiva casistica* e le *argomentazioni lacunose*, si presentano quasi esclusivamente dalla V primaria in poi. Riportiamo di seguito alcuni esempi di ciascuna sottocategoria.

8.1.1 Scorrettezze o imprecisioni matematiche

In questa categoria rientrano tutte le informazioni matematicamente scorrette o imprecise presenti nei libri di testo. Come emerge dalla **Tabella 4**, per quanto concerne questo fenomeno, sono state evidenziate criticità solo dal punto di vista matematico, di cui riportiamo qui di seguito alcuni esempi.

Confusione tra ente geometrico e grandezza. Molte delle affermazioni inesatte rientranti in questa categoria riguardano la confusione terminologica (che veicola

una confusione concettuale), assai diffusa, tra *ente geometrico* e *grandezza*². Il caso più frequente, soprattutto nei libri di testo di scuola primaria, è quello dell'uso dei termini *contorno* e *perimetro*, impiegati erroneamente come sinonimi, pur essendo concetti che dal punto di vista matematico sono solitamente considerati, e dunque definiti, distinti tra loro: il *contorno* è la linea che delimita una parte di piano; con il termine *perimetro*, invece, si intende di solito la sua grandezza caratteristica, ossia la sua lunghezza. Eppure, nei libri di testo si rilevano affermazioni erronee come la seguente:

- (1) Il contorno delle figure si chiama perimetro (parola che deriva dal greco e significa «misura intorno»). (5_3, p. 100)

Si noti come l'affermazione "il contorno delle figure si chiama perimetro" è in contrasto con l'approfondimento sull'origine della parola riportato tra parentesi, che mette correttamente in luce la genesi del termine *perimetro* come legata al concetto di misura.

Altre volte, come nel caso (2), avviene che, nonostante la definizione di *perimetro* riportata sia quella considerata convenzionale in ambito matematico, il suo utilizzo all'interno del testo riveli una confusione tra termini che identificano un *ente geometrico* (in questo caso *base* intesa come un particolare lato del poligono, quindi un segmento) e una *grandezza* (in questo caso *perimetro*):

- (2) Come vedi il poligono regolare è equivalente alla metà di un parallelogramma che ha per base il perimetro del poligono e per altezza l'apotema. (c5_5, p. 317)

L'uso improprio dei termini specialistici non dovrebbe avvenire in un testo qual è quello disciplinare per la scuola, che dovrebbe invece prestare particolare attenzione alla precisione del lessico da proporre agli allievi in fase di formazione.

Nel corpus, invece, si rilevano esempi analoghi anche per i concetti di *superficie* e *area*, termini utilizzati in alcuni casi come sinonimi, pur essendo di solito considerati distinti: il primo come ente geometrico bidimensionale e il secondo come sua grandezza caratteristica.

Un altro esempio di confusione tra *ente geometrico* e *grandezza*, molto diffuso nel corpus DFA-Italmatica per entrambi i livelli scolastici, è riferito alla definizione di *altezza* di un poligono. Nella maggior parte dei libri in cui viene trattato questo

2. Questo fenomeno è presente nel 50,77% dei libri di testo analizzati, in particolare nel 29,27% dei libri di testo di II-III primaria, nel 61,90% dei libri di testo di IV-V primaria, nel 59,57% dei libri di testo di I-II-III secondaria di primo grado.

concetto³, l'*altezza* di un poligono viene definita come un particolare segmento, dunque come un *ente geometrico*, ma poi viene trattata come una *grandezza*, ossia come un numero con la sua specifica unità di misura.

Tra le definizioni più diffuse di *altezza* mostriamo il seguente esempio, tratto da un libro di IV primaria:

- (3) Nel triangolo l'**altezza** è il segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento. (10_4, p. 323)

Questa definizione risulta molto fuorviante per gli allievi e fonte di numerose misconcezioni, come rilevano alcune ricerche condotte su questo tema (Sbaragli, 2008; 2010; 2016; 2017), che mettono in evidenza, oltre alla convinzione di allievi e docenti che l'*altezza* sia uno specifico segmento, e non una particolare lunghezza o distanza, anche l'erronea necessità di far partire il segmento da un vertice. Inoltre, il verbo *cadere* riferito a un segmento rimane una parola un po' misteriosa per gli allievi, che evoca immagini erronee di un segmento che cadendo (cioè compiendo un'azione, seppure involontaria), poi, "può anche spezzarsi".

Tali misconcezioni sono la causa di numerose difficoltà riscontrate anche nelle prove INVALSI in differenti livelli scolastici (Bassani *et al.*, 2012; Botta & Sbaragli, 2016; Sbaragli, 2016), e sono la conseguenza di erronee prassi linguistiche dei libri scolastici (lessicalmente non rigorosi come dovrebbe essere un testo scientifico), e della conseguente trasposizione didattica dei docenti.

Interessante è anche il seguente esempio tratto da un libro di testo di I secondaria di primo grado:

- (4) L'**altezza** di un triangolo relativa a un lato è il segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto o al suo prolungamento. (1_6, p. 550)

A parte il considerare l'*altezza* come un segmento, in questo caso risulta fuorviante l'uso dell'espressione *segmento di perpendicolare*, di cui si è quantificato l'uso al **paragrafo 7.4.2**, che non mette linguisticamente in evidenza la caratteristica della perpendicolarità di essere una relazione binaria tra due enti, come vedremo nel **paragrafo 8.1.2**. Questo caso specifico conferma la predilezione del linguaggio della matematica per le combinazioni sostantivo + sintagma preposizionale che lo specifica: in questo modo, *segmento di perpendicolare* diventa quasi un oggetto a sé, lessicalizzato. La definizione potrebbe essere invece riformulata nel seguente modo:

- (4a) L'**altezza** di un triangolo relativa a un lato è il segmento che parte dal vertice ed è perpendicolare al lato opposto o al suo prolungamento.

3. Si tratta dell'89,71% dei libri di testo.

In questa formulazione, *perpendicolare* recupera la sua funzione di aggettivo riferito ad altezza e non risulta sostantivato come in *di perpendicolare*, per cui si ha che “L'altezza... è il segmento... ed è perpendicolare...”.

Va anche osservato che le definizioni (3) e (4), sopra presentate, sono difficilmente generalizzabili al caso di poligoni con più di tre lati (qual è ad esempio in un pentagono il lato opposto rispetto a un vertice?); questi esempi mostrano come nei libri di testo e, di conseguenza, nelle pratiche didattiche, le *altezze* dei poligoni vengano quasi sempre definite in modi diversi a seconda dei poligoni che si stanno trattando, e non una volta in modo generale. Ad esempio, nello stesso libro in cui si trova la definizione (4) dell'*altezza* del triangolo sono presenti anche le seguenti definizioni del concetto di *altezza* riferito ad altri poligoni:

(5) La distanza tra le basi è l'**altezza** del trapezio. (1_6, p. 596)

(6) La distanza tra la base e il suo lato opposto (parallelo) si dice **altezza** relativa alla base considerata. In ogni parallelogramma ABCD possiamo tracciare due altezze: *DH* relativa alla base *AB* e *DK* relativa alla base *BC*. (1_6, p. 600)

(7) Un lato del rettangolo ne costituisce la **base**, mentre il lato perpendicolare alla base è l'**altezza**. (1_6, p. 602)

Dunque, se nel triangolo l'*altezza* è concepita come un segmento e se ne individuano tre, nel trapezio è diventata una distanza tra i due lati paralleli ed è considerata unica, in un parallelogramma è ancora una distanza e sono due, e nel rettangolo ritorna ad essere un segmento (in particolare un lato) ed è ancora una. Questa varietà definitoria sullo stesso concetto in gioco, invece di un'unica definizione di *altezza* valevole per tutti i poligoni, potrebbe essere fonte di confusione per gli allievi: a loro, infatti, potrebbe sembrare di trovarsi di fronte concetti diversi di volta in volta e non uno unico, valido in più contesti (nelle varie figure). Se, come suggerisce Ferreri (2005, p. 143), definire le parole delle discipline significa «staccare le parole dall'uso banale, corrente», allora è necessario considerare la razionalità nel proporre il lessico specialistico, in modo che sia il più funzionale e il meno dispersivo possibile.

Riportiamo di seguito uno dei pochi esempi di definizione di *altezza* presente nel corpus concepita, invece, in modo da trasferire il concetto in maniera generale, e cioè come *distanza*, cosa che permette di avere un'unica definizione valida per ogni tipo di poligono:

(8) L'altezza è la distanza massima che c'è tra un lato e tutti gli altri punti del poligono. (4_4, p. 78)

Confusione tra enti geometrici diversi. Sono inoltre presenti mescolanze e accostamenti scorretti tra enti geometrici di vario tipo, come nel seguente caso, in cui gli *assi di simmetria* vengono definiti come *segmenti*, invece che come *rette*:

- (9) Abbiamo tracciato gli assi di simmetria dei poligoni, cioè i segmenti che li dividono in due parti sovrapponibili attraverso il ribaltamento. (16_4, p. 330)

Capita anche che la *superficie*, quindi un ente bidimensionale, venga associata allo *spazio*, ossia un ente tridimensionale (che però viene inteso come *piano* nella combinazione *spazio piano*, associazione che diventa insensata dal punto di vista matematico):

- (10) La **superficie** di un poligono è lo spazio piano che esso occupa all'interno del proprio confine: è la sua regione interna. (9_4, p. 370)

Definizioni e proposizioni erranee. Tra le affermazioni matematicamente scorrette registriamo inoltre una serie di errori concettuali che coinvolgono proprietà, relazioni o oggetti geometrici diversi e che ritroviamo in modo non sistematico in alcuni libri di testo, come ad esempio:

- (11) Il rombo è equivalente ad un rettangolo che ha per base una diagonale e per altezza l'altra diagonale. (c5_5, p. 310)

Questa affermazione risulta erranea in quanto l'area del rombo corrisponde all'area di un rettangolo che ha un lato della stessa lunghezza di una diagonale del rombo, e l'altro consecutivo della lunghezza di metà dell'altra diagonale.

Interessante è anche il seguente esempio, in cui si afferma che un poligono regolare qualsiasi può sempre essere diviso in tanti *triangoli equilateri* quanti sono i lati del poligono, ma tale affermazione risulta scorretta, dato che solo nel caso di un esagono regolare si ottengono triangoli equilateri, mentre in tutti gli altri casi si hanno *triangoli genericamente isosceli*:

- (12) Unendo il centro con i vertici, abbiamo diviso ciascun poligono in tanti triangoli equilateri quanti sono i lati del poligono stesso: 3 nel triangolo, 4 nel quadrato, 5 nel pentagono, 6 nell'esagono... (13_5, p. 306)

Matematicamente scorretta risulta anche la seguente definizione:

- (13) L'**angolo interno** è la parte del poligono delimitata da due lati consecutivi. (9_4, p. 359)

in quanto l'*angolo (interno)* è una parte di piano illimitata, di cui quella interna al poligono è solo una porzione. Risulta dunque improprio parlare sia di *parte del poligono*, invece di *parte di piano*, sia di *lati consecutivi*, invece delle *rette che contengono lati consecutivi*. Dal punto di vista didattico, affermazioni di questo tipo possono rafforzare negli allievi convinzioni erranee di *angolo* inteso in senso matematico (Sbaragli, 2011; Sbaragli & Santi 2011; 2012). Tale scelta definitoria radicalizza infatti l'idea di *angolo* inteso in senso comune come sinonimo di vertice o di parte di piano collocata vicino a un vertice (origine dell'*angolo*)⁴, invece dell'interpretazione matematica di *angolo*, concepita come *parte di piano illimitata*. A tal riguardo, alcune ricerche hanno messo in evidenza come la gestione di *parole-termini* che presentano sia un significato tecnico-specialistico sia ulteriori accezioni nella lingua comune risulta particolarmente difficoltosa negli allievi, soprattutto in quella fase in cui stanno ancora apprendendo e consolidando il concetto matematico (Demartini, Franchini & Sbaragli, sottomesso). Questo, se espresso in modo scorretto, rischia di non chiarirsi mai.

8.1.2 Omissioni o impliciti

In questa categoria rientrano le *omissioni*, ossia informazioni propriamente mancanti in un testo, e gli *impliciti*, cioè informazioni non dette esplicitamente, ma che si presumono deducibili dal testo⁵: vi è infatti una differenza tra ciò che un testo non comunica neppure implicitamente e ciò che è implicito, ma viene comunque comunicato, se il ricevente è in grado di ricavarlo. Questa distinzione si chiarisce prendendo un semplicissimo esempio da Sbisà (1999, p. 18): «dicendo “La minestra si raffredda” si comunica implicitamente che una certa minestra è attualmente calda e forse, in un contesto adatto, che il destinatario dell'enunciato è in ritardo per il pranzo, ma non si dice né si implica se si tratti di minestra di verdure o di pasta e fagioli».

Nessun testo è privo di *omissioni* o di *informazione implicita*. Tuttavia, quando si tratta di testo scientifico (e in particolare di testo per la scuola), una riflessione va

4. Una definizione ben rappresentativa in questo senso dell'accezione di *angolo* nel senso comune è, ad esempio, quella offerta dal dizionario Sabatini-Coletti, oggi consultabile online (https://dizionario.corriere.it/dizionario_italiano/A/angolo.shtml): «Incrocio di due elementi murari o di altro tipo SIN cantone: il bar dell'a. o all'a.; spigolo: battere sull'a. del tavolo» (SIN sta per sinonimo di cantone); poi è dato anche il significato figurato: «Luogo tranquillo, isolato || a. morto, estens. spazio poco visibile, poco frequentato». Invece, il significato segnalato come specialistico della geometria è il seguente: «Ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette uscenti dallo stesso punto: a. retto, acuto».

5. Per approfondire questa distinzione e la tradizione linguistico-pragmatica degli studi sull'argomento, nonché i vari tipi di implicito, si rimanda a Sbisà (2007).

fatta, in quanto le mancanze, spesso, lasciano veri e propri “buchi” e la gestione dell’implicito comporta un’elaborazione più complessa da parte del lettore. Come rimarca però Sbisà (1999, pp. 18-19), l’implicito non significa sempre e comunque cattiva scrittura: «in linea di principio ciò che determina il grado di chiarezza di un testo non è la distribuzione dell’informazione fra detto e implicito, ma piuttosto il grado di trasparenza dell’implicito, la percorribilità dei percorsi inferenziali che servono a esplicitarlo». Gli esempi che commenteremo in seguito mostrano *omissioni* dannose e *impliciti* ben poco trasparenti e inferibili: in molti casi sarebbe assolutamente necessario inserire esplicitamente le informazioni taciute, poiché non è detto che il lettore riesca a colmare i vuoti e ad attuare i processi inferenziali richiesti per recuperarle. Si sa, infatti, che il processo di comprensione del testo è un processo complesso e articolato (Cardarelli & Bertolini, 2020; Levorato, 2000; Lumbelli, 2009), che per funzionare prevede l’interazione efficace di diversi sotto-processi; tra questi, la ricostruzione o il recupero delle informazioni comunicate in forma implicita è uno dei più complessi e cruciali, soprattutto perché è estremamente legato alle abilità dei singoli allievi e al loro bagaglio disciplinare, linguistico ed esperienziale. Quindi, quando si tratta di testo scientifico – che deve agevolare la comprensione dei contenuti di una disciplina –, l’attenzione a ciò che viene *omesso* oppure lasciato *implicito* dev’essere massima, poiché quello che il testo non dice del tutto o dice implicitamente può rimanere mancante, se il lettore non riesce a integrarlo.

Nei fatti, invece, come mostrato in **Tabella 4**, questa categoria risulta essere la più frequente. Riportiamo di seguito alcuni esempi, considerando, come mostrano gli studi di pragmatica, che le *omissioni* e gli *impliciti* non sono tutti uguali (Sbisà 1999 offre un elenco tipologico degli *impliciti* portando esempi tratti proprio da testi scolastici).

Omissione di relazione. Le omissioni più diffuse sono quelle legate alle relazioni di *perpendicolarità* o *parallelismo* in cui non si esplicita rispetto a che cosa un segmento (o una retta) è *perpendicolare* o *parallelo*. È vero che si tratta di relazioni di tipo binario, ossia di relazioni che assumono significato solo fra coppie di elementi, ma non è detto che questa presupposizione sia già parte del sapere degli allievi. E, anche qualora lo fosse, non è comunque detto che gli allievi sappiano stabilire quali sono gli elementi della coppia, se questi non sono dichiarati in modo esplicito.

Si consideri il seguente esempio tratto da un libro di testo di V primaria (**Fig. 1, 6_5**, p. 337), che in forma simile si trova in gran parte dei libri analizzati e che richiama l’esempio (4) del **paragrafo 8.1.1** già commentato in precedenza:

2 Il quadrato ABCD

- Stabilisci la misura del lato e traccia la base DA.
- Appoggia la squadra sulla base.
- Parti da A e traccia un segmento perpendicolare.
- Fai lo stesso da D.
- Su ogni segmento perpendicolare misura una distanza uguale al lato DA.
- Unisci i punti.

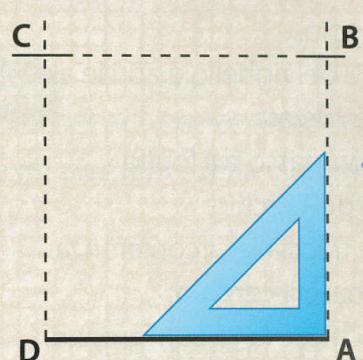


Fig. 1 - Esempio di *omissione* di relazione di *perpendicolarità* (IV primaria).

Tra l'altro, parlare di *segmento perpendicolare* senza specificare a cosa sia *perpendicolare* è matematicamente privo di senso. Vederlo scritto in un libro di testo, eventualmente rafforzato da un utilizzo da parte del docente, ostacola la comprensione della relazione di *perpendicolarità*; non stupisce dunque che tale erroneo uso sia presente nel lessico degli allievi che, come riporta D'Amore (2000), parlano di "retta parallela", "insieme equipotente" o "poligono equivalente" in modo assoluto e non relazionale, dimostrando di non rendersi conto che affermazioni di questo tipo sono scorrette. La capacità di analizzare in modo critico le parole che si usano e si leggono nei testi è, invece, una competenza che andrebbe incentivata a scuola anche a partire dalla riflessione sulle *omissioni* presenti nei libri di testo.

Emerge, dunque, da questa casistica, tutta l'importanza di un'educazione linguistica e, specificamente, di un'educazione alla lingua scientifica che contempli la metariflessione sulle parole e sui costrutti, cioè sulle fondamentali relazioni che le legano, perché in esse si può riverberare la sostanza dei contenuti scientifici. Essere esposti a modelli approssimativi certamente non agevolerà una costruzione concettuale precisa né, ovviamente, una capacità verbale specifica corretta e accurata, che è uno dei traguardi della competenza disciplinare. Vale dunque la pena di puntare all'esattezza come valore necessario del testo scientifico per la scuola, lasciando agli allievi il necessario margine di spontaneità e di sperimentazione nell'accostarsi al sapere in gioco, ma premurandosi di proporre loro modelli curati, coerenti e precisi.

Sempre riferito al concetto di *altezza* è il seguente esempio, che parla di *altezza* di un triangolo come se fosse unica, dato che si fa uso dell'articolo determinativo (*l'altezza*), senza far percepire che le *altezze* sono più di una e quella da prendere in considerazione è quella *relativa al lato* considerato:

- (1) L'area del **triangolo** si ottiene moltiplicando la misura della base per l'altezza diviso 2. (1_4, p. 344)

Non è semplice, da un simile uso dell'articolo determinativo (probabilmente inserito per analogia con gli altri articoli determinativi e preposizioni articolate della frase), ricostruire la giusta semantica, cioè integrare ciò che il testo non dice né fa capire (ossia che l'*altezza* dev'essere quella relativa al *lato* considerato). Per alleggerire lo sforzo cognitivo e rendere più chiaro il sapere in costruzione, sarebbe stata sufficiente una riformulazione con l'aggiunta del termine *relativa* come riportato di seguito:

- (1a) L'area del **triangolo** si ottiene moltiplicando la misura della base per la relativa altezza diviso 2.

Una scelta ancor più efficace sarebbe stata quella di generalizzare l'affermazione indicando l'area di un triangolo come il prodotto della lunghezza di un qualsiasi *lato* per l'*altezza relativa* al *lato* stesso. Ricordiamo che il testo disciplinare non dovrebbe essere una sfida linguistica gratuitamente complicata, ma – senza eccessi banalizzanti – dovrebbe agevolare il percorso acquisizionale dell'allievo fornendogli una trasposizione chiara e non ambigua del sapere.

Omissione di proprietà o grandezza. Un altro aspetto critico, molto diffuso nei libri di testo analizzati, è l'*omissione* della grandezza alla quale si riferisce una data misura. Si prenda ad esempio la seguente frase:

- (2) Disegna un triangolo che ha un lato di 3 cm, un altro lato di 4,3 cm, e l'angolo tra essi compreso di 140°. (4_6, p. 158)

In questo caso sarebbe risultato più chiaro, al fine dell'apprendimento, esplicitare la grandezza associata alla misura indicata, quindi parlare di *lunghezza del lato*, ottenendo l'espressione "Disegna un triangolo che ha un lato lungo 3 cm, un altro 4,3 cm..." e di *ampiezza dell'angolo* nell'espressione "... e l'ampiezza dell'angolo tra essi compreso di 140°". Non è infatti il *lato* ad essere di 3 o 4,3 cm, ma la sua *lunghezza*; analogamente, non è l'*angolo* ad essere di 140°, ma la sua *ampiezza*. Nell'espressione linguistica corrente è consuetudine operare scelte e *omissioni* di questo tipo, che, però, non dovrebbero risalire nell'ambito specialistico, dove l'informazione dovrebbe essere completa e non ambigua per non ostacolare un'efficace costruzione del sapere in gioco.

Ci sono poi situazioni ancora più evidenti, in cui l'*omissione* della grandezza a cui si sta facendo riferimento può creare ambiguità, come nel seguente esempio:

- (3) Raddoppiando e ribaltando i tre trapezi si osserva che ogni trapezio è la metà di un rettangolo o di un romboide che hanno come base la somma delle basi del trapezio e la sua altezza. (1_4, p. 344)

A quale grandezza del poligono ci si riferisce? All'area? Al perimetro? L'espressione "ogni trapezio è la metà..." è lacunosa e non pienamente corretta. Omettere tali informazioni rischia di confondere l'allievo che sta apprendendo tali concetti, dato che in questo caso si parla probabilmente di metà dell'area e non di metà del perimetro. E ancora:

(4) Misuriamo il rettangolo EFGH con il centimetro. (3_4, p. 342)

Che cosa, del rettangolo, si vuole misurare? Il perimetro o uno dei lati oppure ancora una diagonale? E poi, un rettangolo si misura con un centimetro, ossia con un'unità di misura, o con uno strumento come la riga?

Nei libri di testo dei vari livelli scolastici si ritrovano poi espressioni linguistiche come la seguente:

(5) Anche per le aree esistono **formule inverse**, che permettono di calcolare basi, altezze, diagonali a partire dall'area. (4_5, p. 77)

Qui l'azione del *calcolare* è associata a enti geometrici (*basi, altezze, diagonali*), che nel libro sono stati definiti come particolari segmenti, e non con le loro grandezze. La riformulazione completa e perciò corretta dovrebbe quindi essere in questo caso "calcolare la lunghezza delle basi, delle altezze, delle diagonali".

C'è poi l'abitudine, emersa in numerosi libri di testo dalla IV primaria in su, a utilizzare espressioni come la seguente quando si trattano i parallelogrammi:

(6) Il rettangolo è un poligono con i lati uguali a due a due. (9_4, p. 373)

in cui la forma linguistica *a due a due* non esplicita quali lati devono essere della stessa lunghezza (ossia se *paralleli* o *opposti*, oppure *consecutivi*), ma solo che ci sono coppie di lati congruenti, omettendo dunque una proprietà specifica del rettangolo, che lo distingue ad esempio dal deltoide (che ha invece due coppie di lati consecutivi congruenti). In questo caso sarebbe stato necessario specificare "con i lati *paralleli* uguali". Inoltre, non precisando quale grandezza legata al *lato* debba essere uguale (in questo esempio la *lunghezza*), registriamo un caso di *omissione* di grandezza. Come evidenza D'Amore (2000), costrutti poco curati di questo tipo inducono l'allievo a ripeterli acriticamente perdendo di vista il più delle volte il senso della comunicazione e del sapere in gioco. Di che cosa si sta parlando in realtà? Non di rado si sente l'allievo *definire* il *parallelogramma* come "un quadrilatero che ha i lati a due a due", evidenziando una totale mancanza di comprensione delle grandezze in gioco (e anche uno scarso controllo linguistico della polirematica

avverbiale *a due a due*, che, in abbinamento col verbo *avere*, necessita della presenza di un aggettivo). Per un breve approfondimento quantitativo sulla presenza di *a due a due* nel corpus si rimanda al **paragrafo 7.4.2**.

Omissione di indicazioni operative. In altri casi vengono *omesse* a livello linguistico informazioni per realizzare delle costruzioni, a volte intuibili dal contesto o dalla figura a fianco, altre volte taciute completamente, anche a livello figurale.

Nel seguente esempio di IV primaria (**Fig. 2**, 8_4, p. 104) mancano le indicazioni di come piegare il foglio (in realtà, tra l'altro, nel testo "piegarli" è riferito a "poligoni") per far sì che i *lati* e gli *angoli* possano sovrapporsi. Tale esempio non è accompagnato da nessuna figura esplicativa dell'azione da compiere.

1 Disegna, in ogni poligono, tutti gli assi di simmetria. Per individuare più facilmente l'asse di simmetria, puoi disegnare gli stessi poligoni su un foglio di carta, piegarli e verificare che gli elementi, come lati e angoli, si sovrappongano perfettamente.

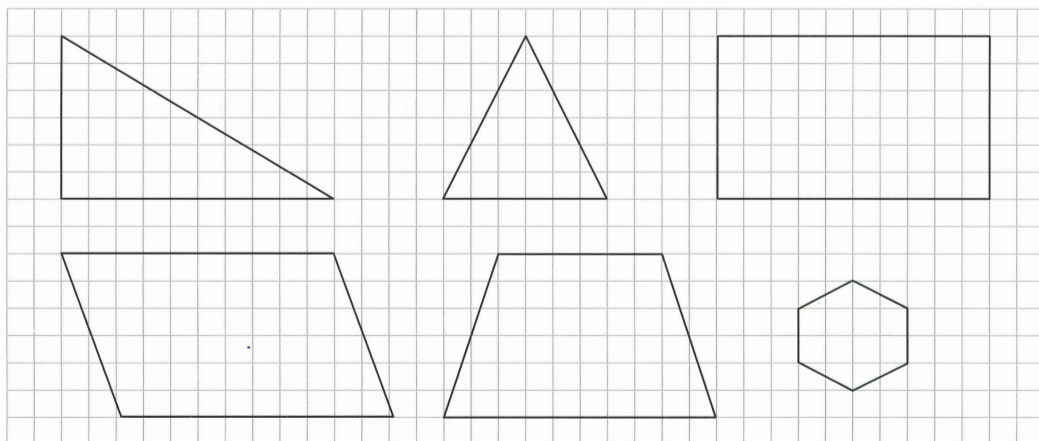


Fig. 2 - Esempio di *omissione* di indicazioni operative (IV primaria).

Di seguito mostriamo un ulteriore esempio tratto da un libro di II primaria (**Fig. 3**, 3_2, p. 82) in cui l'indicazione di "ripassare di verde il confine" è insufficiente, poiché non fornisce le informazioni necessarie all'allievo per poter eseguire la consegna in modo corretto. Sarebbe stato essenziale indicare di quale elemento grafico considerare il *confine*, dato che l'immagine è molto ricca di rappresentazioni di vario tipo.

1 Ripassa di verde il **confine**, colora di rosso la **regione interna** e di blu la **regione esterna**.

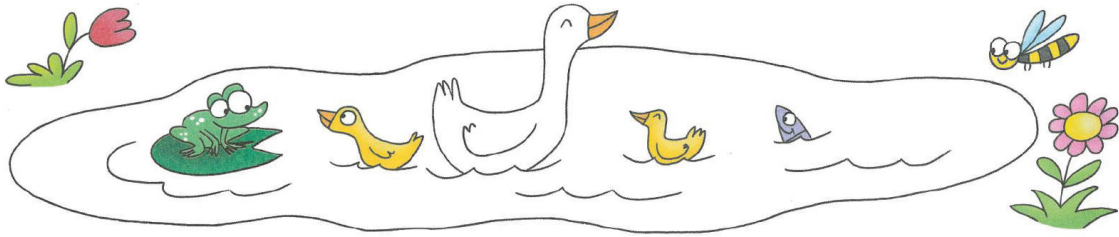


Fig. 3 - Esempio di *omissione* di indicazioni operative (II primaria).

Impliciti. Tra gli impliciti segnaliamo il seguente esempio tratto da un libro di IV primaria (Fig. 4, 10_4, p. 317):

- Il poligono *b* è **concavo** perché contiene il prolungamento dei suoi lati.

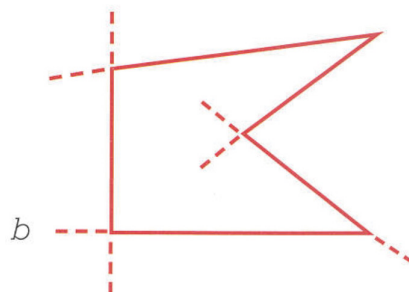


Fig. 4 - Esempio di *implicito* (IV primaria).

In questo estratto non è esplicitato come si debbano *prolungare* i lati (in modo che il prolungamento sia effettuato a partire dai due estremi dei lati e nella stessa direzione del lato), ma lo si lascia dedurre solo dal disegno, nel quale per due lati si sono *prolungati* entrambi gli estremi e per gli altri due no; dunque, ricostruire con quale criterio vada effettuato il *prolungamento* non è per nulla immediato: a partire da un solo estremo? Da entrambi? Nella stessa direzione della retta contenente ciascun lato? Tali informazioni non vengono comunicate esplicitamente. Tuttavia,

dato che tale implicito legato alle convinzioni (di solito si prolunga in questo modo) potrebbe non essere noto a un allievo di IV primaria, risulterebbe importante precisarlo almeno una volta nel testo. Inoltre, in questo caso, come già anticipato, la figura che accompagna il testo non permette di ricostruire univocamente tutte le informazioni dato che alcuni lati sono *prolungati* solo a partire da un vertice, altri in entrambi i versi e in un paio di casi non sembra neppure che la direzione del *prolungamento* sia la stessa del lato. A ciò va aggiunto che non si esplicita di quanti lati occorre considerare il *prolungamento* per determinare se un poligono è concavo oppure no. Tutti? Almeno uno? Almeno due? Qualcuno? Di nuovo l'informazione non è esplicitata in modo chiaro neanche attraverso la figura, dato che non tutti i *prolungamenti* "attraversano" il poligono, come invece l'espressione verbale "dei suoi lati" potrebbe far pensare (sottintendendo *di tutti i suoi lati*). Ma allora quanti se ne devono considerare? Questo esempio presenta un *implicito* molto complicato da risolvere e mette in evidenza come l'uso dei quantificatori sia spesso trascurato e non funzionale nei libri di testo, come vedremo anche in esempi successivi (esempio (1) del **par. 8.1.3**). Un'analisi critica dei libri di testo fatta con gli allievi potrebbe essere un ottimo modo per puntualizzare aspetti che non rientrano solo in una scelta linguistica e stilistica dell'autore, ma anche in una scelta concettuale rispetto al sapere in gioco.

Un ulteriore esempio di *implicito* è il seguente:

- (7) Due poligoni che hanno i lati delle stesse dimensioni e gli angoli della stessa ampiezza si dicono **congruenti**. (8_4, p. 96)

L'informazione che si dà per scontata, in quanto ricostruibile dai lettori, è il fatto che i due *poligoni* considerati debbano avere lo *stesso numero* di *lati*. Si possono dunque confrontare tra loro triangoli, quadrilateri, pentagoni ecc. Tale informazione non è scritta esplicitamente, anche se è ricavabile dal contesto, dato che si afferma che i lati dei due poligoni devono avere la stessa lunghezza e analogamente gli angoli la stessa ampiezza, presupponendo che il *numero* sia lo stesso. Un simile *implicito* risulta dunque meno fuorviante rispetto a esempi di *omissioni* precedenti, ma in ogni caso sarebbe da evitare in fase di formazione, quando non è per nulla scontato che tutti i destinatari possiedano l'informazione alla base dell'enunciato.

8.1.3 Mancanza di coerenza del testo

Come già anticipato, un altro aspetto che è emerso dall'analisi dei testi è la mancanza di *coerenza semantica* nelle informazioni fornite in alcuni segmenti testuali, a volte legata all'utilizzo di termini differenti all'interno del testo seppur riferiti allo stesso

oggetto (casi di variazione sinonimica inappropriata o inefficace), altre volte legata a informazioni discordanti dal punto di vista matematico. Vediamo alcuni esempi.

Incoerenze nell'uso di termini. Utilizzare termini specialistici diversi per indicare lo stesso ente geometrico all'interno dello stesso libro di testo, senza esplicitarlo fin dall'inizio, oppure fornire definizioni dello stesso oggetto matematico non coerenti potrebbe comportare spaesamento e confusione concettuale nell'allievo che si trova a dover gestire un lessico specialistico non sempre uniforme.

Ad esempio, l'uso dell'aggettivo *interno* per indicare un tipo di *angolo* dei poligoni è spesso evitato nei libri di scuola primaria, dato che raramente in questo livello scolastico si approfondisce la differenza tra *angolo interno* e *angolo esterno* di un poligono. Tale scelta può risultare giustificabile; per contro, ciò che invece può risultare inefficace è quando all'interno dello stesso testo si utilizza a volte il termine *angolo*, senza alcun appellativo ulteriore, e altre volte *angolo interno*, creando una varietà (o, piuttosto, una discordanza nel riferirsi a uno stesso referente, dato che un poligono possiede anche *angoli esterni*), cosa che, invece di portare a un arricchimento lessicale, può portare a un disordine concettuale. Ciò si può osservare nel seguente esempio di V primaria (Fig. 5, 7_5, p. 268), in cui nell'elenco puntato si parla solo di *angolo*, e sotto di *angolo interno* ed *esterno*:

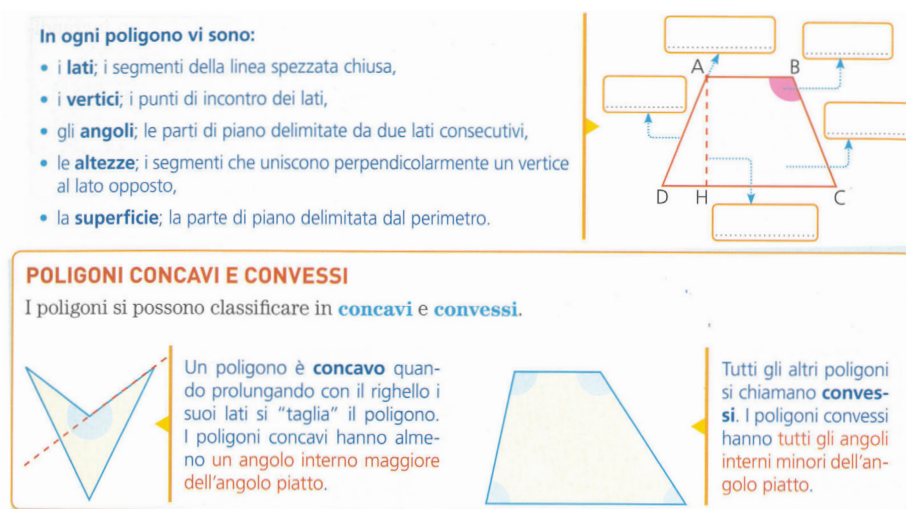


Fig. 5 – Esempio di *incoerenza nell'uso di termini* (V primaria).

Le lingue delle scienze dovrebbero essere il luogo della precisione lessicale e concettuale per eccellenza: simili incoerenze lessicali non favoriscono certamente

un efficace ampliamento del vocabolario specialistico, che non può avvenire attraverso l'esposizione a un uso approssimativo. Nei testi proposti a bambini e ragazzi, allora, se la scelta è quella di precisare il tipo di *angolo*, è auspicabile mantenere coerente lo stesso termine nel corso del volume, continuando a utilizzare *angolo interno* o *angolo*, se si sono denominati così inizialmente, oppure, come spesso avviene nella scuola secondaria di primo grado, chiarire che, per convenzione, se si legge *angolo* si intende quello *interno*, mentre se si sta trattando l'*angolo esterno* l'aggettivo *esterno* viene esplicitato. Dal canto loro, sarebbe importante rendere consapevoli i docenti che la condanna della ripetizione di parole uguali – spesso (a volte troppo) sottolineata agli allievi quando scrivono – non è sempre pertinente e men che meno lo è nel testo scientifico, nel quale i termini esatti per designare enti e fenomeni sono quasi sempre insostituibili e vanno ripetuti; ciò a beneficio della correttezza, della chiarezza espositiva e della adeguata acquisizione terminologica. Discorso diverso, invece, va fatto quando la variazione è dovuta all'uso di parole spontanee, scelte dagli allievi in fase di costruzione dei concetti, che sono le benvenute e, anzi, andrebbero considerate ed esplorate insieme a loro.

Anche nel caso della denominazione del “quadrilatero che ha due coppie di lati opposti paralleli ma non tutti della stessa lunghezza”, all'interno degli stessi testi si registrano casi di utilizzo variegato dei termini *romboide*⁶, *parallelogramma*, *parallelogramma comune*, *parallelogramma generico*⁷, spesso senza l'esplicitazione del loro uso come sinonimi. Ciò tende a indurre l'apprendente a ipotizzare, erroneamente, che a termini diversi corrispondano referenti differenti, venendo meno la biunivocità tipica delle terminologie specialistiche. Al riguardo, vale anche la pena di sottolineare che l'uso del termine *comune* abbinato ai vari tipi di figure (in questo caso *parallelogramma*), per intendere figure con caratteristiche generiche, senza caratteristiche aggiuntive particolari, invece del più adeguato termine *generico*, ri-

6. L'uso del sostantivo tecnico *romboide* si sta storicamente perdendo a favore del più diffuso sostantivo *parallelogramma*: *romboide* compare nel corpus DFA-Italmatica 371 volte, 17 delle quali con l'alternativa “o parallelogramma/-o comune” (1 sola volta con l'alternativa “parallelogramma/-o generico” e 1 sola con l'alternativa “parallelogramma”). Il sostantivo tecnico *parallelogramma/-o* compare, invece, 1'046 volte senza ulteriori specifiche (ma 10 volte con l'alternativa “parallelogramma o romboide”).

7. All'interno del corpus DFA-Italmatica l'aggettivo *generico* è presente 33 volte: 3 in co-occorrenza con il termine *parallelogramma/-o* (“1 parallelogrammi sono detti anche parallelogrammi generici...”; “L'area di un generico parallelogramma di base *b* e altezza *h*...”; “Altra figura interessante, dal punto di vista degli angoli, è il parallelogramma generico o romboide”); 7 volte con *poligono*; 8 volte con *triangolo*; 15 volte con *quadrilatero* (2 delle quali con la specifica “quadrilateri scaleni o generici”). L'aggettivo *comune*, invece, compare 29 volte, così distribuite per associazioni: 6 volte in co-occorrenza con *quadrilatero*, sempre al plurale (“quadrilateri comuni”); 23 volte con *parallelogramma/-o* (17 delle quali viene dato anche il sinonimo “o romboide”).

sulta un po' ambiguo e poco specifico. Infatti, nella lingua dell'uso, *comune* rimanda all'idea di usuale, solito, diffuso: informazioni che non hanno a che vedere con l'informazione geometrica che si vuole trasmettere, meglio veicolata da *generico*, il cui significato rimanda all'idea di ampio e comprensivo.

Diversa è la seguente situazione (Fig. 6, 1_5, p. 322), spesso presente nei libri scolastici soprattutto di scuola primaria, in cui le *denominazioni* di alcuni poligoni regolari come *triangolo equilatero* e *quadrato* sono corrette, essendo poligoni regolari rispettivamente di 3 e 4 lati, ma poi a *pentagono*, *esagono*, *ottagono* non si aggiunge l'etichetta *regolare*, che sarebbe invece necessario esplicitare (*pentagono regolare*, *esagono regolare*, *ottagono regolare*). In altre parole, all'interno dello stesso insieme di oggetti (*poligoni regolari*) troviamo alcuni termini corretti e altri imprecisi essendo troppo generici.

poligono regolare	numero fisso
triangolo equilatero	0,289
quadrato	0,5
pentagono	0,688
esagono	0,866
ottagono	1,207


Fig. 6 – Esempio di *incoerenza nell'uso di termini* (V primaria).

La dissimmetria della scelta dei nomi dei *poligoni regolari* presente in questo libro di testo si aggiunge a un'altra ancora più generalizzata, profonda e antica, in quanto risultato delle diverse etimologie: il fatto che *triangolo* e *quadrato* sono di etimologia latina, mentre gli altri, da *pentagono* in poi, sono di derivazione greca; inoltre, il *quadrilatero regolare* ha anche un nome specifico, appunto *quadrato*, come alternativa a *quadrilatero regolare*. E poi ancora, non c'è omogeneità nelle parole che compongono i termini: *triangolo* e *pentagono* (e successivi) sono composti da un prefisso numerale e dal termine *angolo*, mentre *quadrilatero* da un prefisso numerale e da *lati*, ma i vari quadrilateri hanno nomi specifici dalle etimologie più o meno varie e più o meno trasparenti (*quadrato*, *rettangolo*, *parallelogramma*, *rombo* e *trapezio*). E si potrebbero osservare ulteriori dettagli, come il fatto che la lista in **Figura 6** presenti un vuoto fra *esagono* e *ottagono* (cosa che accade nella quasi totalità dei testi): un allievo potrebbe chiedersi che ne è dell'*ettagono*,

semplicemente meno protagonista, per tradizione, nei testi scolastici⁸. Considerati questi aspetti, sarebbe opportuno cercare di evitare ulteriori elementi di ambiguità e di possibile difficoltà a carico della memoria.

Incoerenze concettuali. Se le incoerenze viste fino ad ora riguardano perlopiù aspetti esclusivamente lessicali, gli esempi che seguono si riferiscono anche a *elementi concettuali* che, come abbiamo visto nelle pagine precedenti (esempi (1), (10) del par. 8.1.1) risultano particolarmente critici, in quanto coinvolgono concetti geometrici che tradizionalmente sono oggetto di incomprensioni e ostacolo per gli allievi, come quello di *superficie* e *area*. Nell'esempio riportato in **Figura 7** (12_4, p. 336), i termini *superficie* e *area* vengono inizialmente trattati come sinonimi, quindi riferiti allo stesso oggetto geometrico ("La parte colorata in giallo corrisponde invece alla **superficie** o **area** del rettangolo") mentre, dopo qualche riga, gli stessi termini si riferiscono a oggetti definiti in modi diversi ("La **superficie** di un poligono è la parte di piano compresa dentro al perimetro. La misura della superficie si chiama **area**").

L'area dei poligoni



● **Osserva il rettangolo a sinistra, leggi e rispondi.**

La linea rossa corrisponde al **perimetro**.
Per misurare il perimetro potremmo utilizzare come unità di misura la lunghezza del lato di un quadratino

• Quanti misura la lunghezza del perimetro?

La parte colorata in giallo corrisponde invece alla **superficie** o **area** del rettangolo.

• Potresti misurare l'area del rettangolo utilizzando la stessa unità di misura del perimetro? Sì No

Per misurare una superficie è necessario utilizzare come unità di misura un'altra superficie.
In questo caso, potremmo utilizzare un quadratino intero

• Quanti misura la superficie del rettangolo?

La **superficie** di un poligono è la parte di piano compresa dentro al perimetro.
La misura della superficie si chiama **area**.

Fig. 7 – Esempio di *incoerenza concettuale* riferita a grandezze (IV primaria).

L'utilizzo incoerente di termini specialistici e la perdita di univocità dei referenti rinforza ancor di più la difficoltà che spesso emerge negli allievi nel considerare un ente geometrico e la sua grandezza caratteristica in modo appropriato.

⁸. Il lemma compare 101 volte nel nostro corpus, a fronte delle 206 di *ottagono*, ad esempio, per non parlare delle centinaia o migliaia di occorrenze dei nomi dei poligoni precedenti, per le quali si può vedere il capitolo 7.

Un altro esempio significativo di *incoerenza* delle informazioni si rintraccia nella *classificazione dei quadrilateri*, argomento centrale sia nella scuola primaria sia nella scuola secondaria di primo grado. Riportiamo il seguente esempio tratto da un libro di IV primaria, dove la prima volta che il testo affronta l'argomento dei trapezi viene fornita la seguente definizione:

(1) I **trapezi** sono quadrilateri che hanno almeno una coppia di lati paralleli, le **basi**. (6_4, p. 332)

ma poi nello specchietto riassuntivo alla fine del capitolo del libro (Fig. 8, 6_4, p. 335), che ha il ruolo di schematizzare le informazioni e di fornire all'allievo un supporto in vista di un ripasso, si ritrova un'affermazione *incoerente*, in quanto si dichiara che un *quadrilatero* è un trapezio se ha "solo due lati paralleli". Un trapezio dovrebbe dunque avere allo stesso tempo *almeno* una coppia di lati paralleli (dunque può esserci *esattamente* una coppia di lati paralleli o due coppie di lati paralleli) ed esclusivamente *una sola*. L'utilizzo contemporaneo dell'avverbio *almeno* in una definizione e di *solo* nell'altra, risulta dunque *incoerente*. Tale incoerenza risulta diffusa nei libri scolastici come era stato messo in evidenza in Martini e Sbaragli (2005).

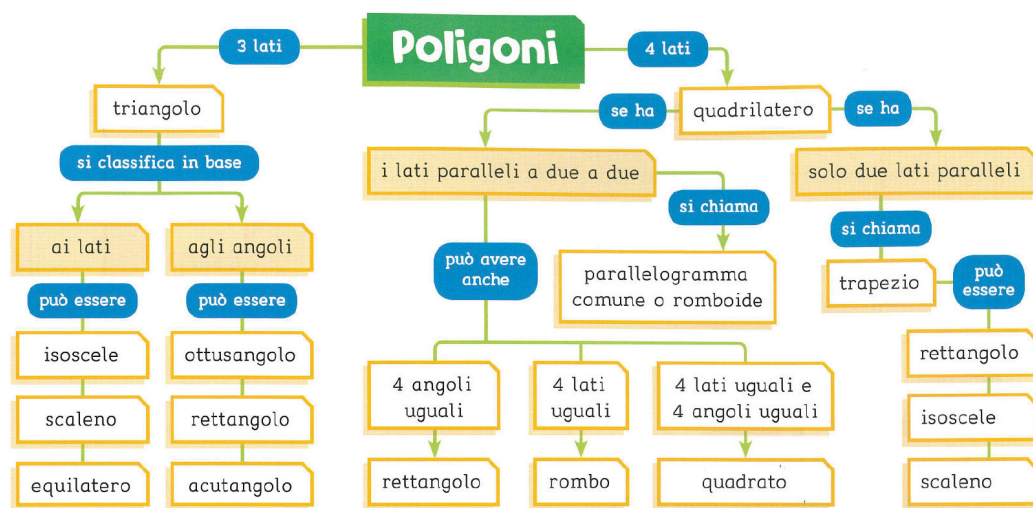


Fig. 8 – Esempio di *incoerenza concettuale* (IV primaria).

Sempre in riferimento alla *classificazione dei quadrilateri*, nelle **Figure 9a** (10_5, p. 336) e **9b** (10_5, p. 337), riferite allo stesso libro di testo, si mostra un esempio di *incoerenza* nella trattazione del *quadrato* e del *rombo*. Nella prima pagina si vuole

porre l'accento sul fatto che la differenza tra il genere prossimo rombi ed il sotto-genere quadrati riguarda solo l'ampiezza degli angoli, concetto presentato nelle definizioni ("rombi: hanno quattro lati congruenti"; "quadrati: hanno quattro angoli e quattro lati congruenti") e tramite la rappresentazione insiemistica. Tuttavia, nella pagina successiva, affermando che le diagonali di un *rombo* sono "disuguali" (ultima riga della tabella), si cade necessariamente in contraddizione con quanto dichiarato precedentemente, in quanto si esclude la possibilità di considerare i *quadrati* come sottoinsieme dei *rombi* (Sbaragli, 2012).

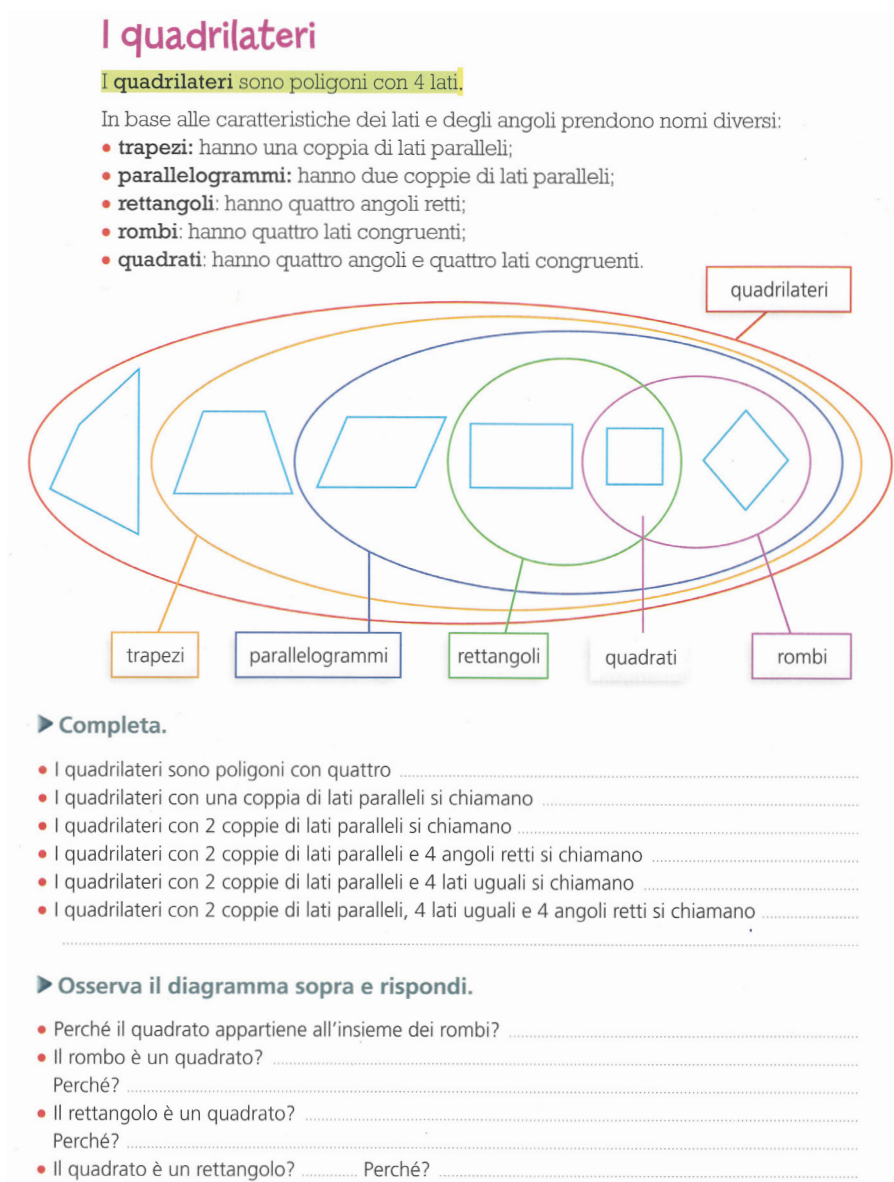


Fig. 9a – Esempio di *incoerenza concettuale* (V primaria).

Un'ulteriore classificazione dei quadrilateri possiamo ottenerla osservando gli **angoli** e le **diagonali** (d).


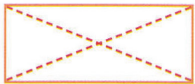


QUADRILATERO	FIGURA	ANGOLI	DIAGONALI
quadrato		4 angoli retti	diagonali congruenti , si dividono a metà nel punto d'incontro, e perpendicolari tra loro
rettangolo		4 angoli retti	diagonali congruenti , si dividono a metà nel punto d'incontro
parallelogramma		2 angoli acuti 2 angoli ottusi	diagonali disuguali , si dividono a metà nel punto d'incontro
rombo		2 angoli acuti 2 angoli ottusi	diagonali disuguali , si dividono a metà nel punto d'incontro, e perpendicolari tra loro

Fig. 9b – Esempio di *incoerenza concettuale* (V primaria).

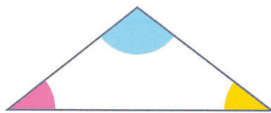
8.1.4 Esposizioni restrittive

In questa categoria rientrano parti di testo in cui sono presenti proposte troppo vincolanti e restrittive per poter generalizzare ciò che viene esposto: aspetto che risulta importante a livello matematico, dato che si parla molto spesso di categorie costituite da infiniti elementi con caratteristiche molto più ampie di quelle proposte.

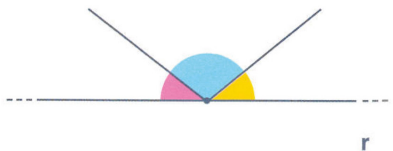
Ad esempio, in **Figura 10** (c5_4, p. 288) viene rappresentato un particolare triangolo (il *triangolo isoscele*), quando la proprietà che si vuole verificare (“Nei triangoli **la somma degli angoli interni misura sempre 180°**”) è valida per un qualsiasi tipo di triangolo. L'intento dell'autore del testo è di fornire un esempio guidato su cui realizzare la costruzione passo a passo, dando un esempio di triangolo visivamente conosciuto; tuttavia con tale scelta si potrebbe veicolare un messaggio errato, ossia che la proprietà valga solo per uno specifico tipo di triangolo. Sarebbe stato più opportuno proporre graficamente un triangolo senza alcuna proprietà specifica e far lavorare gli allievi su quello, oppure chiedere a ogni allievo di costruire un *triangolo generico*, e realizzare la costruzione verificando che la proprietà data sia comunque valida.

RIFLETTO E RISPONDO

1. Disegna su un foglio un triangolo e colora ogni angolo in modo diverso, come nell'esempio.



Ora ritaglia gli angoli e disponili uno accanto all'altro sulla retta r .



Che angolo hai ottenuto?

Nei triangoli **la somma degli angoli interni misura sempre 180° .**

Fig. 10 – Esempio di *esposizione restrittiva* (IV primaria).

Anche la modalità di ritagliare le parti di piano per individuare gli *angoli* di un triangolo in modo da mostrare che la *somma delle loro ampiezze è 180°* può essere lasciata libera, come mostra l'estratto in **Figura 11** (11_4, p. 307):

LABORATORIO

Disegno e... PROVO!

Ecco come **verificare** che la somma degli angoli interni di un triangolo è **sempre 180°** .

- Disegna tanti triangoli su un foglio e colora l'ampiezza degli angoli con colori diversi.
- Taglia ogni triangolo come vedi, poi accosta i tre angoli: ottieni un angolo piatto, cioè di 180° .

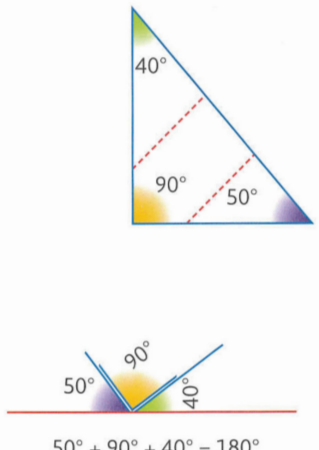
Fig. 11 – Esempio di *costruzione non vincolante*.

Tuttavia in alcuni casi si chiede di ritagliare il triangolo in modi molto specifici e vincolanti, come avviene in **Figura 12** ("Ritaglia il triangolo in tre parti come mostrato nel disegno", 1_4, p. 330), dove si chiede di effettuare tagli particolari (indicati da linee tratteggiate): paralleli tra loro e perpendicolari ad uno dei lati del triangolo.

LABORATORIO DELLE COMPETENZE
LAVORO CON GLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO

● **Verifica che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.**

- Disegna un triangolo rettangolo.
- Colora e misura con il goniometro i suoi angoli, come vedi nel disegno.
- Ritaglia il triangolo in tre parti come mostrato nel disegno.
Attenzione a non tagliare l'ampiezza degli angoli.
- Traccia una linea rossa orizzontale su un foglio.
- Avvicina fra di loro gli angoli, come se fossero le tessere di un puzzle.
- Osserva che gli angoli insieme formano un angolo piatto di 180°.
- Verificalo con un calcolo:
 $50^\circ + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$



$50^\circ + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

Fig. 12 – Esempio di *esposizione restrittiva* (IV primaria).

Un modo di ritagliare molto particolare, dunque, lontano dall'essere generico, come invece sarebbe auspicabile in occasione di costruzioni legate a proprietà generalizzabili a una categoria di figure.

8.1.5 Ridondanze

In questa categoria rientrano *espressioni linguistiche ridondanti*, ossia in cui è presente una sovrabbondanza di informazioni e di parole che possono essere in contrasto con abitudini o scelte convenzionali matematiche, e che possono risultare non funzionali alla comprensione del sapere in gioco.

Ridondanze nelle definizioni. Per quanto riguarda questo tipo di ridondanza, già analizzata nel **paragrafo 6.2.2.2**, sebbene possa trattarsi in alcuni casi di una scelta giustificabile da un punto di vista didattico, va considerato che allontana l'allievo dall'idea di *definizione matematica* che, come abbiamo mostrato, risulta essere diversa da quella del senso comune.

Ridondanze legate alle grandezze. Anche nell'ambito delle grandezze e delle misure si riscontrano ridondanze dal punto di vista linguistico, come emerge dal seguente estratto:

- (1) Il perimetro di una figura geometrica è la misura della lunghezza del suo contorno. Per calcolare la misura del perimetro di un poligono, basta misurare la lunghezza dei suoi lati e fare la somma delle misure. (10_4, p. 326)

dove l'oggetto *perimetro* è definito nella prima frase come "la misura della lunghezza del suo contorno", dunque l'espressione "la misura del perimetro" (utilizzata nella frase successiva) risulta essere *ridondante*, essendo già implicito il concetto di misura nel termine *perimetro*. "Spacchettando" il sintagma "la misura del perimetro", e in particolare esplicitando il significato di *perimetro*, avremmo infatti l'espressione "calcolare la misura della misura della lunghezza del contorno", con il termine *misura* ripetuto due volte. Risulta dunque più adeguato affermare direttamente "calcolare il perimetro".

In modo analogo evidenziamo la ridondanza in questa frase:

- (2) Calcola la base di un rettangolo sapendo che l'area misura 24 cm² e l'altezza è di 6 cm. (c4_7, p. 415)

Nello stesso libro l'*area* viene definita come la *misura* della superficie ("La **misura di una superficie** si dice **area** e si indica con il simbolo **A**.", c4_7, p. 405), dunque anche in questo caso nell'espressione "l'area misura" si rileva una ridondanza: "... sapendo che la misura di una superficie misura...". Anche in questo caso si poteva dire direttamente "... l'area è di ...". In questo estratto si nota anche l'espressione assai impropria: "calcola la base" (commentata anche per l'esempio (5) del par. 8.1.2), dato che è impossibile calcolare un oggetto che è stato definito come lato. Al limite è possibile individuare la sua lunghezza, ma non l'oggetto in sé.

8.1.6 Eccessiva casistica

In questa categoria mostriamo un aspetto legato al proporre un'elencazione superflua di casi inerenti a una specifica affermazione, emerso in alcuni libri.

Ad esempio, nel trattare il *perimetro* dei poligoni viene fornita una lista di *formule* adattate ai diversi tipi di poligoni (prevalentemente triangoli e quadrilateri), spesso senza sottolineare che il metodo per calcolare il *perimetro* di un qualsiasi poligono è sempre lo stesso e deriva dalla definizione di perimetro, ossia sommare le lun-

ghezze dei suoi lati (Fig. 13, c2_4, p. 1). Se si lavorasse maggiormente su questo aspetto a livello didattico non sarebbe necessario per gli allievi memorizzare varie *formule* elencate soprattutto negli schemi riassuntivi a inizio o a fine capitolo, ma il trovare strategie algebriche di semplificazione dell'addizione diventerebbe a questo punto un'esigenza sentita e non trasmessa acriticamente.

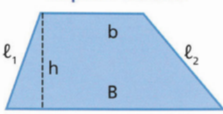
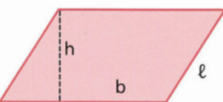
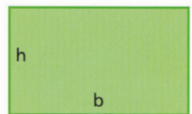
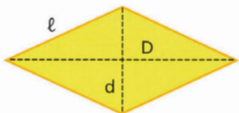

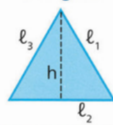
FIGURE PIANE	PERIMETRO
<p>Trapezio scaleno</p> 	$p = B + b + l_1 + l_2$
<p>Romboide</p> 	$p = (b + l) \times 2$
<p>Rettangolo</p> 	$p = (b + h) \times 2$
<p>Rombo</p> 	$p = l \times 4$
<p>Quadrato</p> 	$p = l \times 4$
<p>Triangolo</p> 	<p>Equilatero: $p = l \times 3$</p> <p>Isoscele: $p = (l_1 \times 2) + l_2$</p> <p>Scaleno: $p = l_1 + l_2 + l_3$</p>

Fig. 13 – Esempio di *eccessiva casistica* (IV primaria).

Nel seguente esempio si mostra un estratto in cui l'*eccessiva casistica* è espressa graficamente da un triangolo rappresentato in tre posizioni diverse per sottolineare le tre *basi* e le tre *altezze* relative a ciascuna *base* (Fig. 14, 1_4, p. 330). Oltre a risultare eccessivo, è anche fuorviante per gli allievi, perché si mettono in risalto la posizione vincolante della *base* (orizzontale, come "lato di appoggio") e quella

dell'*altezza* (di conseguenza verticale), nonostante questi due oggetti geometrici possano essere disposti, ovviamente, in qualsiasi posizione. Sarebbe stato didatticamente più efficace mostrare un'unica rappresentazione del triangolo con i tre *lati* e le relative tre *altezze*. Rappresentazioni come quelle di **Figura 14**, accompagnate spesso anche da espressioni linguistiche inadeguate (**par. 8.2.2**) reiterate nel tempo, formano nella mente degli allievi diverse misconcezioni, che comportano difficoltà nel riconoscimento di rappresentazioni figurali non convenzionali legate alle *basi* e alle *altezze* di poligoni; questo può portare l'allievo a essere incapace di coordinare adeguatamente le diverse rappresentazioni a prescindere dal posizionamento vincolante dell'oggetto (Martini & Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2017). Ad esempio, per quanto concerne l'*altezza*, diversi studenti di vari livelli scolastici sono portati a ricercare la *verticalità*, invece della *perpendicolarità*, omettendo così una relazione fondamentale del concetto in gioco.

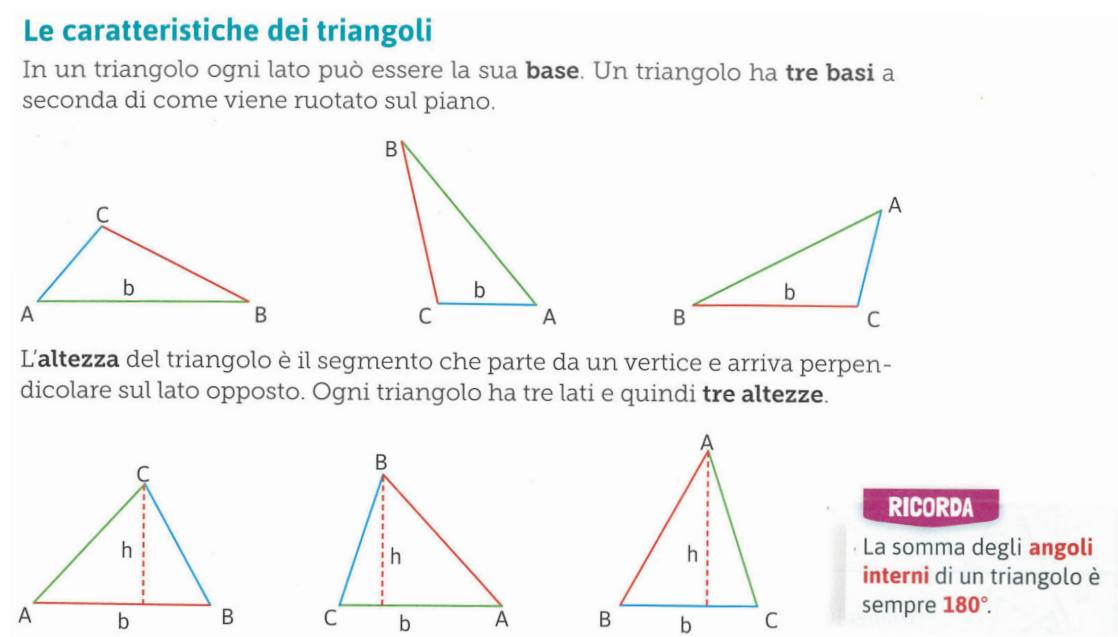


Fig. 14 – Esempio di *eccessiva casistica* (IV primaria).

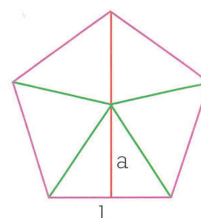
8.1.7 Argomentazioni lacunose

In questa categoria rientrano estratti di libro che presentano *argomentazioni* poco chiare, con passaggi non esplicitati, o argomentazioni in cui il percorso verso la generalizzazione avviene in modo brusco o sottinteso (aspetto considerato anche nel **par. 6.1.2**); estratti di testi che potrebbero complicare l'apprendimento degli allievi.

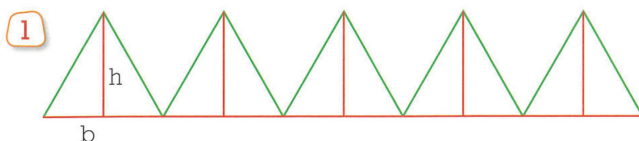
Come esempio di questa categoria, consideriamo l'estratto di **Figura 15** (10_5, p. 346), nel quale sono presenti alcuni elementi di criticità rientranti in questa categoria. L'autore vuole mostrare al lettore come si calcola l'area di un poligono regolare proponendo un esempio specifico: il pentagono regolare. A partire da questa figura mostra due costruzioni al fine di giungere a una formulazione generale. Entrambe le costruzioni si basano sulla suddivisione del pentagono in triangoli isosceli congruenti: nella prima si considera il fatto che i triangoli sono cinque e che la somma delle loro aree è esattamente l'area del pentagono; nella seconda, i triangoli vengono anche ridistribuiti spazialmente in modo da costruire una figura di cui è nota la formula per calcolare l'area, in questo caso il trapezio.

L'area dei poligoni regolari

Abbiamo visto che un poligono regolare può essere diviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati. Un pentagono regolare è formato, quindi, da 5 triangoli che hanno per base il lato del pentagono e per altezza il suo apotema.



Proviamo a scomporre il pentagono. Possiamo farlo in due modi.

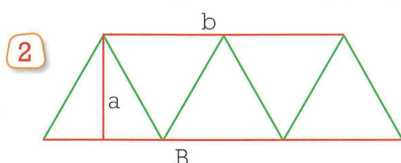


In questo caso l'**area del pentagono** si può trovare calcolando l'area di un triangolo che ha per base il lato del pentagono (l) e per altezza il suo apotema (a) e poi si moltiplica per 5.

L'**area del triangolo** è: $A = (b \times h) : 2 = (l \times a) : 2$

L'**area del pentagono** è: $A = [(l \times a) : 2] \times 5$

Poiché $l \times 5$ è il perimetro del pentagono la formula diventa $A = (P \times a) : 2$.



In questo secondo caso l'**area del pentagono** si trova calcolando l'area del trapezio che ha come somma delle basi ($B + b$) il perimetro del pentagono e come altezza l'apotema.

L'**area del trapezio** è: $A = [(B + b) \times h] : 2$

L'**area del pentagono** è: $A = (P \times a) : 2$

L'area di un poligono regolare si calcola moltiplicando il perimetro per l'apotema e dividendo il prodotto per 2.

$$A = (P \times a) : 2$$



Fig. 15 – Esempio di *argomentazione lacunosa* (V primaria).

Pur essendo interessante – dal punto di vista didattico – vedere diverse strategie di costruzione, si osservano alcuni punti critici:

- l'uso di elementi grafici discordanti non facilita il collegamento tra la figura iniziale e la ricomposizione finale: il contorno del pentagono è di colore rosa mentre sia nella prima sia nella seconda costruzione i segmenti corrispondenti (uno dei lati dei triangoli) sono di colore rosso;
- dal punto di vista algebrico, in entrambe le costruzioni sono *omessi* alcuni passaggi, dando per scontato che l'allievo (in questo caso di V primaria) possa ricostruirli in modo autonomo:

(1) L'area del pentagono è: $A = [(l \times a) : 2] \times 5$ (10_5, p. 346)

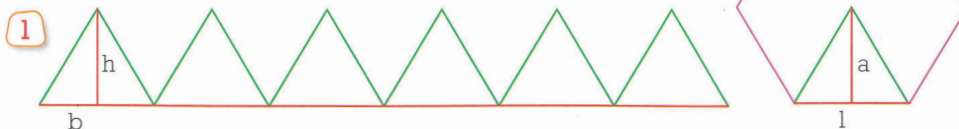
(2) Poiché $l \times 5$ è il perimetro del pentagono la formula diventa $A = (P \times a) : 2$.
(10_5, p. 346)

L'espressione $l \times 5$ non è immediatamente visibile nella prima formulazione dell'area (1), e dunque è necessario prevedere una manipolazione algebrica da parte dell'allievo, il quale dovrebbe applicare le proprietà commutativa e associativa in modo adeguato per giungere alla seconda formulazione (2). Pur essendo un passaggio chiave del percorso argomentativo, esso viene sostanzialmente sottinteso, anche se in realtà la sua comprensione presuppone un'abilità tecnica che non è detto essere propria di tutti gli allievi di questo livello scolastico;

- la seconda costruzione, seppur corretta dal punto di vista geometrico, non è adatta a generalizzare la formula dell'area, in quanto una simile disposizione dei triangoli è possibile solo se il loro numero, e dunque il numero dei lati del poligono regolare, è dispari. Tale scelta ha comportato che nella pagina successiva l'autore del testo abbia scelto di mostrare la costruzione di un esagono regolare in cui il numero di triangoli congruenti (equilateri) è pari a 6, un numero pari (Fig. 16, 10_5, p. 347).

► Osserva e completa.

Prendiamo ora in considerazione l'esagono regolare e proviamo a scomporlo nei due modi.



In questo caso l'**area dell'esagono** si può trovare calcolando l'area di un triangolo e moltiplicandola per

$$A = [(b \times h) : 2] \times 6$$

Poiché $b \times 6$ è uguale al perimetro dell'esagono e l'altezza del triangolo corrisponde all'apotema:

$A = \dots\dots\dots$



In questo secondo caso l'**area dell'esagono** corrisponde all'area del parallelogramma che ha per base metà del perimetro dell'esagono e per altezza l'apotema.

$A = \dots\dots\dots$



Fig. 16 – Esempio di *argomentazione lacunosa* (V primaria).

In tal caso, la costruzione è diversa dalla precedente e porta a un parallelogramma invece che a un trapezio. Diventa dunque difficile per l'allievo delineare un procedimento che conduca alla generalizzazione del processo. La proposizione evidenziata in verde ("L'area di un poligono regolare si calcola moltiplicando il perimetro per l'apotema e dividendo il prodotto per 2"), riportata in **Figura 15**, quindi prima del successivo esempio, risulta dunque lontana dall'essere il risultato di un processo logico-argomentativo chiaro ed esplicito, ma richiede una ricostruzione razionale e autonoma non facile per l'allievo, che potrebbe presumibilmente a questo punto prendere per buona tale proposizione senza aver chiaro il percorso argomentativo celato nel testo.

8.2 Elementi linguistici

All'interno di questi tipi di elementi sono stati evidenziati tre fenomeni che risultano interessanti da essere analizzati sia dal punto di vista didattico sia da quello disciplinare matematico. I tre fenomeni sono i seguenti:

- *eccessiva nomenclatura*: utilizzo di etichette specifiche anche laddove dal punto di vista matematico non sarebbero necessarie;
- *utilizzo di terminologia vincolante o errata*: presenza di termini che dal punto di vista matematico non sono corretti o risultano particolarmente inadatti dal punto di vista didattico;
- *complessità morfosintattica*: struttura delle frasi e forme linguistiche inefficaci, che veicolano informazioni scorrette o equivocabili.

Tali fenomeni sono stati riscontrati nei libri di testo italiani secondo la seguente distribuzione:

	II-III SP		IV-V SP		I-II-III SSPG	
	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico
Eccessiva nomenclatura	1 (6,67%)	53 (37,06%)	22 (6,40%)	155 (27,88%)	9 (2,34%)	284 (18,01%)
Utilizzo di terminologia vincolante o errata	11 (73,33%)	48 (33,57%)	295 (85,75%)	360 (64,75%)	298 (77,60%)	1'191 (75,52%)
Complessità morfosintattica	3 (20,00%)	42 (29,37%)	27 (7,85%)	41 (7,37%)	87 (22,66%)	107 (6,47%)
TOTALE	15 (100%)	143 (100%)	344 (100%)	556 (100%)	384 (100%)	1'577 (100%)

Tab. 5 - Risultati quantitativi degli *elementi linguistici* rilevati nei libri di testo italiani.

Dai dati emerge una preponderanza di elementi critici dal punto di vista didattico legati alle categorie *eccessiva nomenclatura* e *utilizzo di terminologia vincolante o errata*. Riportiamo e commentiamo qui di seguito alcuni esempi di ciascuna sottocategoria.

8.2.1 Eccessiva nomenclatura

Un primo esempio di utilizzo di *eccessiva nomenclatura*, già citato e quantificato in precedenza nel **capitolo 7**, è dato dal *denominare* una specifica famiglia di figure piane come *non poligoni*: si tratta di figure geometriche piane che non sod-

disfano le condizioni dell'essere poligono. Questo fenomeno si riscontra perlopiù nella scuola primaria, dove la tendenza a una terminologia ipertrofica, spesso non sostenuta da esigenze matematiche, potrebbe generare confusione negli allievi, invece di un aiuto a livello didattico. Non è infatti necessario *denominare* una categoria complementare a una data, in questo caso quella di poligono, dato che ciò che viene denominato come *non poligono* non è nient'altro che una generica figura del piano. Si consideri l'estratto di **Figura 17** (7_2, p. 80):

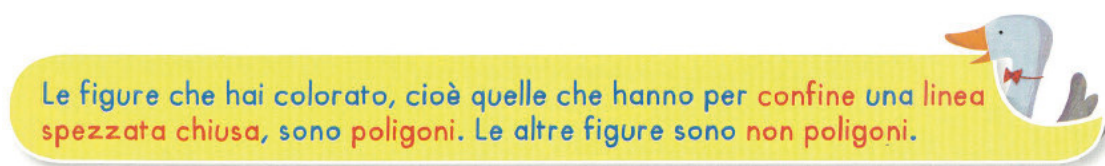


Fig. 17 – Esempio di *eccessiva nomenclatura* (Il primaria): il caso di *non poligono*.

Seppure, da un punto di vista logico, l'affermazione "Non sono poligoni" è equivalente a "Sono non poligoni", in questo caso si fa riferimento a una nuova categoria di figure (con caratteristiche che non vengono esplicitate, ma che devono essere desunte dalla complementarità a un tipo di figure, i poligoni; si parla dunque di "altre figure") e una specifica denominazione: un inutile appesantimento dei concetti in gioco.

A tal proposito, vale la pena di ricordare che la formulazione "Non sono poligoni" (con l'avverbio *non* preposto al predicato) è quella più diffusa e naturale in italiano, mentre la negazione di un sostantivo impone al lettore un'interpretazione doppia per sanare una contraddizione: la frase "Le altre figure sono non poligoni" inizia come affermativa, salvo poi introdurre un termine negativo che impone un nuovo processo di comprensione globale il cui risultato d'insieme è quello di arrivare a stabilire che si tratta di una negazione.

L'iniziale operazione di decodifica, che getta le basi per la costruzione della rappresentazione semantica, deve quindi passare a un'analisi più accurata, in cui il lettore si sofferma sulle parole e sulla loro disposizione: tale passaggio di riflessione sulla componente linguistica è decisivo per poter poi passare a una costruzione semantica adeguata (Van den Broek *et al.*, 2005).

Un altro esempio specifico della scuola secondaria di primo grado è l'introduzione del termine *semiperimetro* (**Fig. 18**, 12_6, p. 231), utilizzato in qualche formula per il calcolo del perimetro o dell'area, ma non particolarmente utile dal punto di vista concettuale, dato che sarebbe possibile dividere direttamente il perimetro per due, senza bisogno di introdurre un termine privo di utilità.

PAROLE ► Il **perimetro** di un poligono è la somma tra le misure delle lunghezze dei suoi lati e si indica con **p** .
Il **semiperimetro**, indicato con $\frac{p}{2}$, è la metà del perimetro.

SIMBOLI ►
$$p = \underbrace{AB + BC + CD + \dots}_{\text{somma tra le misure delle lunghezze dei lati}}$$

Fig. 18 – Esempio di *eccessiva nomenclatura* (I secondaria di primo grado): il caso di *semiperimetro*.

Nei libri di testo esaminati è piuttosto frequente fornire un'*eccessiva nomenclatura* non necessaria, come emerge dal seguente estratto riportato in **Figura 19** (9_6, p. 154), dove si riportano nomi specifici (sovente in forma di sintagma nominale complesso, costituito da sostantivo + preposizione + sostantivo o sostantivo + aggettivo: *angolo al vertice*, *angolo alla base*, *lato obliquo*, *base*) per alcuni elementi del triangolo isoscele, che sarebbero generalizzabili a elementi dei poligoni, ricadendo anche nella categoria successiva di *utilizzo di terminologia vincolante o errata*:

► In un **triangolo isoscele**:

- i due lati congruenti, AC e BC, si chiamano **lati obliqui**, il terzo lato, AB, è la **base**;
- l'angolo formato dai due lati congruenti, \hat{C} , si chiama **angolo al vertice**, gli altri due, \hat{A} e \hat{B} , **angoli alla base**;
- i **due angoli alla base sono congruenti**, $\hat{A} = \hat{B}$; puoi rendertene conto piegando a metà un triangolo isoscele in modo da far coincidere i vertici della base.

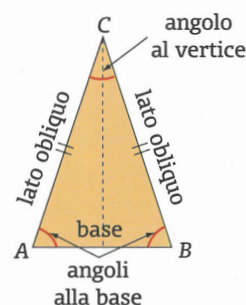


Fig. 19 – Esempio di *eccessiva nomenclatura* (I secondaria di primo grado).

8.2.2 Utilizzo di terminologia vincolante o errata

L'esempio precedente in **Figura 19** (9_6, p. 154) rientra anche in questa categoria in quanto, oltre al termine *base*, non necessario dal punto di vista matematico (potrebbe essere sostituito dal più semplice e meno vincolante termine *lato*) vengono denominati solo per il triangolo isoscele un particolare *angolo* come *angolo al vertice* e gli altri due come *angoli alla base*: scelte che risultano inopportune, vincolanti e inefficaci per gli allievi in quanto inducono un posizionamento specifico della figura sul piano. Allo stesso modo, denominare i due lati

congruenti del triangolo isoscele *lati obliqui*, seppur sia una convenzione ormai diffusa da anni, e per questo presente nella maggior parte dei libri di testo (come si è rilevato quantitativamente al **par. 7.4.2**), risulta una scelta inefficace dal punto di vista didattico in quanto vincola la posizione da far assumere all'oggetto geometrico considerato. Gli allievi che si abituano a denominare tali elementi utilizzando questi termini vincolanti, e a visualizzare il triangolo isoscele sempre in posizione standard, dimostrano poi solitamente maggiori difficoltà a riconoscere che un triangolo come quello rappresentato a destra nella **Figura 20** sia isoscele, in quanto il lato che solitamente viene chiamato "obliquo" ora non lo è più rispetto al punto di vista del lettore.



Fig. 20 – Diverse rappresentazioni di un triangolo isoscele.

Tali misconcezioni «dipendono dalla scelta linguistica dei termini che dà maggiore risalto alla posizione assunta dall'oggetto del quale si sta parlando, piuttosto che all'essenza dell'oggetto stesso, valorizzando così saperi esterni al contesto della matematica» (Sbaragli, 2005). Alcune ricerche (Sbaragli, 2006b; 2012) hanno evidenziato come delle scelte vincolanti siano un accessorio superfluo e a volte dannoso in quanto, soprattutto in ambito geometrico, è auspicabile che l'allievo riesca a osservare le proprietà matematiche dell'oggetto, invarianti rispetto alla posizione assunta (Laborde, 2004). L'utilizzo dunque di una nomenclatura inutile, eccessiva, vincolante e a volte fuorviante comporta un aggiuntivo costo cognitivo che si richiede all'allievo in fase di apprendimento, creando spesso un appesantimento non giustificato né da una reale necessità né da una funzionalità didattica. Sarebbe opportuno dunque ripulire la terminologia da tutti quegli orpelli che non aggiungono informazioni matematiche, e anzi possono risultare di ostacolo per l'apprendimento.

Un altro esempio è legato alla definizione di *altezza* in un triangolo, che, come abbiamo già avuto modo di riscontrare in precedenti esempi, è sede di particolari

insidie e leggerezze. Analizzandola qualitativamente dal punto di vista lessicale emergono ulteriori spunti di riflessione. Esaminiamo una definizione che abitualmente si trova nei libri di testo (si consideri ad esempio l'estratto (3) del **par. 8.1.1**, che riportiamo per comodità anche qui di seguito denominato come (1)):

- (1) Nel triangolo l'**altezza** è il segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento. (10_4, p. 323)

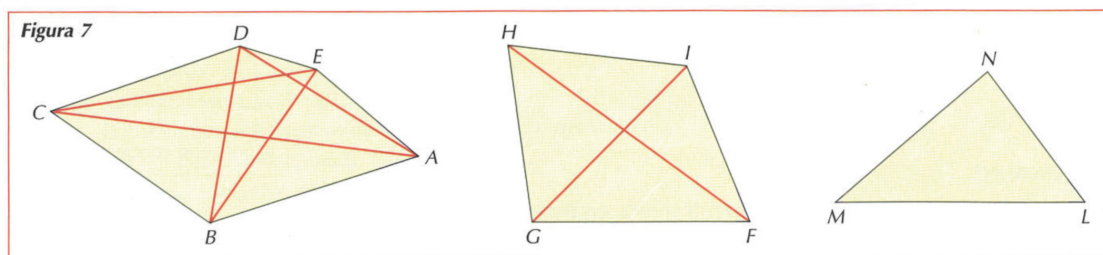
In essa si utilizza una terminologia che ricorda la dinamicità di una costruzione concreta (tramite due verbi di movimento accennati al **par. 7.4.2**: *parte*, *cade*), ma che potrebbe veicolare anche in questo caso un'informazione fuorviante e inesatta. Il segmento che rappresenta l'*altezza*, infatti, come abbiamo già anticipato, non deve necessariamente avere un estremo coincidente con un vertice del poligono, nonostante le rappresentazioni stereotipate di tale concetto rafforzino questa idea. Inoltre, l'utilizzo del termine *cade*, che ricorda la forza di gravità, induce l'allievo a confondere il concetto di perpendicolarità con quello di verticalità.

La presenza di innumerevoli verbi che sottintendono una visione dinamica della geometria (come *appoggiare*, *cadere*, *unire*, *partire*, *uscire*, *incontrare*) – dettate dalla scelta di guidare l'allievo a realizzare concretamente o solo mentalmente un'azione per fissare l'apprendimento – possono in alcuni casi essere in conflitto con il contesto in cui sono inserite. Consideriamo il seguente esempio, in cui si vuole far giungere l'allievo alla formula che permette di individuare il *numero di diagonali in un poligono* (**Fig. 21**, 8_6, pp. 118-119):

1.2 Le diagonali di un poligono

DEFINIZIONE. Un segmento che unisce due vertici non consecutivi di un poligono prende il nome di **diagonale**.

Disegniamo tre poligoni: un pentagono, un quadrilatero e un triangolo e tracciamo tutte le loro diagonali (**figura 7**). Se contiamo quante diagonali escono da ogni vertice dei poligoni notiamo che:



- dal vertice *C* del pentagono escono due diagonali: *CA*, *CE*;
- dal vertice *G* del quadrilatero esce una sola diagonale: *GI*;
- da qualunque vertice del triangolo non esce alcuna diagonale.

In generale, la differenza tra il numero dei lati di un poligono e il numero delle diagonali uscenti da un vertice dello stesso è costante e vale sempre 3 da cui:

$$\text{numero diagonali uscenti da un vertice} = n - 3$$

Sempre in riferimento alla **figura 7**, se contiamo il numero complessivo di diagonali per ciascun poligono notiamo che il pentagono *ABCDE* presenta cinque diagonali, il quadrilatero *FGHI* due e il triangolo *LMN* nessuna.

Tra il numero *n* dei lati di un poligono e il numero delle sue diagonali esiste una relazione che si esprime con la formula:

$$n^{\circ} \text{ diagonali} = n \cdot (n - 3) : 2$$

POLIGONO	DIAGONALI USCENTI DA OGNI VERTICE
Pentagono	2
Quadrilatero	1
Triangolo	0



GUIDA ALLO STUDIO

Fig. 21 – Esempio di *utilizzo di terminologia vincolante o errata* (I secondaria di primo grado).

In varie parti dell'estratto viene usato il verbo *uscire* collegato al termine *diagonale*, coniugato e accordato in diverse forme: "quante diagonali escono", "escono due diagonali", "esce una sola diagonale", "non esce alcuna diagonale", "diagonali uscenti". Nel testo si ripete dunque che da un vertice *esce* una diagonale; tuttavia non risulta chiaro perché una diagonale non debba invece *entrare* in un vertice. L'utilizzo del solo verbo *uscire* non permette infatti di capire, e dunque di giustificare, il passaggio algebrico di dividere per 2 il prodotto $n \cdot (n-3)$, che è scritto nella formula finale evidenziata nell'ultimo riquadro. L'autore costruisce il percorso argomentativo proponendo alcuni passaggi logici che partono dall'osservazione che ogni vertice è l'estremo di $n-3$ diagonali; essendo *n* il numero di vertici di un poligono di *n* lati, il numero totale di segmenti contati in questo modo diventa $n \cdot (n-3)$. Ma poiché ogni segmento viene contato due volte proprio perché è sia *uscente* che *entrante* in uno stesso vertice, si rende dunque necessario dimezzare il numero totale dei segmenti.

Si riscontrano altri casi in cui le parole della lingua dell'uso, utilizzate nel contesto geometrico, possono risultare erranee, come nel seguente esempio:

- (2) Un poligono può essere convesso o concavo:
- è **convesso** quando non contiene i prolungamenti dei lati.
 - è **concavo** quando contiene i prolungamenti di alcuni lati. (2_5, p. 343)

Il verbo *contenere* presuppone che l'oggetto contenuto ("prolungamenti di alcuni lati") sia solitamente considerato nell'uso comune interno al contenente ("po-

ligono”), informazione che nel contesto in cui siamo è inesatta: il prolungamento di un segmento è infatti illimitato (essendo una retta/semiretta) e dunque non può essere contenuto all’interno di un poligono, che è invece una parte di piano limitata; piuttosto, il poligono potrebbe essere *attraversato* dai prolungamenti, invece di contenerli, oppure si potrebbe affermare che i punti dei prolungamenti appartengono o sono punti del poligono.

Si riscontra una situazione analoga nel seguente esempio, in cui il verbo *tagliare* viene utilizzato in contesto geometrico:

(3) Attenzione a non tagliare l’ampiezza degli angoli. (1_4, p. 330)

Non ha alcun senso associare il verbo *tagliare* all’ampiezza di un angolo, dato che quest’ultima è una grandezza, ossia una caratteristica dell’angolo, e non può essere *tagliata* come se fosse un oggetto concreto o al limite un ente geometrico.

Soprattutto negli ordini inferiori di scolarità si assiste non di rado a una mescolanza di parole tipiche del contesto reale con tecnicismi propri del linguaggio della matematica, perché si pensa che per l’allievo sia il modo più semplice per parlare degli oggetti matematici. Questo, tuttavia, può in alcuni casi portare inevitabilmente a una mancanza di precisione o a formulazioni errate dal punto di vista della disciplina (Laborde, 1995). Potremmo quindi dire che «Didatticamente risulta quindi necessario trovare un compromesso tra la correttezza disciplinare e una comunicazione consapevole e ragionata della matematica, che presti attenzione anche agli aspetti linguistici fin dai primi anni di scolarizzazione, proprio perché sono imprescindibili per un apprendimento solido ed efficace» (Sbaragli, Demartini & Franchini, 2021, p. 11).

Riscontriamo una situazione simile nell’impiego inopportuno della parola *quadrato* (Fig. 22, 7_4, p. 271).

Esempio.

Calcola il perimetro del poligono contando i quadretti.

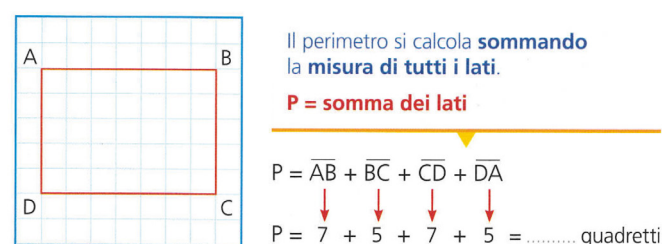


Fig. 22 – Esempio di *utilizzo di terminologia vincolante o errata* (IV primaria).

In questo caso il *quadretto* è dato come unità di misura per individuare il perimetro di un determinato poligono; in realtà, trattandosi di perimetro, si dovrebbe coinvolgere una sola dimensione, ossia le lunghezze dei tratti, segmenti o lati di un quadretto, e non interi quadretti bidimensionali. Questa scelta approssimativa, rara nei libri di testo analizzati, è circolante nel linguaggio comune, spesso in contesto scolastico (“Una l’alta tre quadretti”, “Le rette distano l’una dall’altra due quadretti”): il fatto è che nella lingua di tutti i giorni ci possiamo permettere più approssimazioni, magari anche funzionali a velocizzare la comunicazione, ma lo stesso non dovrebbe verificarsi nel testo scolastico di matematica: infatti ciò può essere una delle cause di alcune misconcezioni possedute dagli allievi, che si ripercuotono anche nei risultati delle prove standardizzate di matematica del Canton Ticino e dell’Italia (Bolondi *et al.*, 2012; Sbaragli, 2015; Sbaragli & Franchini, 2014).

8.2.3 Complessità morfosintattica

I rilievi sulla leggibilità mostrati nel **paragrafo 7.2** hanno permesso di osservare come i testi scolastici di matematica non siano testi semplici alla lettura, considerando che si rivolgono ad allievi spesso giovanissimi. La difficoltà intrinseca al discorso matematico insieme ad alcune peculiarità stilistiche sedimentate nel tempo cooperano insieme a produrre un discorso con radicati tratti di complessità, alcuni imprescindibili e altri evitabili. Poiché comprendere un testo non significa gestire uno a uno i significati delle parole, ma costruirsi una efficace rappresentazione semantica d’insieme, oltre alle singole parole, dal punto di vista didattico, è dunque fondamentale considerare le espressioni linguistiche che maggiormente possono generare problemi al lettore. Ciò non solo a livello di gestione della morfosintassi, ma anche perché la morfosintassi stessa può contribuire a connotare il sapere disciplinare in un certo modo. L’informazione, infatti, non passa solo attraverso i vocaboli, ma anche tramite altri elementi della lingua (i modi verbali, i costrutti, l’ordine delle parole e così via).

Prendiamo ad esempio la presenza, in varie parti dei libri di testo, di forme verbali che si connotano a livello lessicale e morfologico per una sfumatura particolarmente imperativa e vincolante. Queste veicolano un messaggio prescrittivo e costrittivo anche laddove l’affermazione, la procedura, o l’indicazione dovrebbero comportare una possibilità e non un vincolo. Si considerino i seguenti estratti, caratterizzati da forme verbali dal forte valore illocutivo, cioè che provocano un effetto sul comportamento del destinatario:

- (1) Per calcolare le aree degli altri poligoni dovrai sempre fare riferimento all’area del rettangolo. (5_4, p. 262)

- (2) Anche per calcolare l'area del trapezio occorre raddoppiarlo. (c5_4, p. 302)
- (3) Il **perimetro** si calcola sommando le misure di due lati non congruenti e moltiplicando per due il risultato. (18_6, p. 303)
- (4) Quando si disegnano gli angoli esterni di un poligono, non se ne devono disegnare due per ogni vertice, ma uno solo. (c2_6, p. 117)

Oltre al modo propriamente imperativo ("non se ne devono" in (4)), si possono notare anche le frequenti forme impersonali come "si calcola" in (3) e gli infiniti come "occorre" in (2) possono assumere valore imperativo (si pensi al frequente ricorso a esse in leggi e testi giuridici), così come il futuro con valore prescrittivo in (1). In tutti questi esempi l'approccio eccessivamente direttivo conduce alla costruzione di un'immagine distorta della matematica e compromette le potenzialità didattiche di procedure e strategie differenti da quelle proposte. Ciò induce l'allievo a memorizzare la tecnica o l'indicazione descritta senza che percepisca di avere la possibilità di esplorare alternative valide, come invece sarebbe auspicabile fare in classe, ad esempio lavorando per individuare formule diverse per il calcolo dell'area o del perimetro di poligoni.

Passando ai costrutti e all'ordine delle parole, evidenziamo poi situazioni in cui la struttura stessa della frase veicola un'informazione matematicamente scorretta, come nel seguente esempio:

- (5) Un poligono è **convesso** se tutti i segmenti che uniscono due punti qualunque della sua superficie rimangono all'interno del poligono. (1_3, p. 80)

L'espressione "tutti i segmenti che uniscono due punti qualunque" induce a pensare erroneamente che due punti possano essere gli estremi di più di un segmento. Una buona riformulazione potrebbe essere questa: "Un poligono è **convesso** se per qualunque coppia di suoi punti, il segmento che li unisce rimane all'interno del poligono", eliminando l'ambiguo "tutti i segmenti".

Sono poi frequenti i casi in cui non è chiaro o esplicitato a quale oggetto si riferisce una data caratteristica. Si consideri ad esempio:

- (6) Questi poligoni si dicono REGOLARI perché hanno i lati e gli angoli congruenti. (14_4, p. 311)

Come abbiamo già anticipato, la scelta di collocazione dell'aggettivo *congruenti* nella frase potrebbe produrre ambiguità concettuali, poiché l'italiano è una lingua che permette una grande mobilità interna dei costituenti di frase e la collocazione dell'aggettivo può avere importanti ripercussioni semantiche. Il termine *congruenti* posto solo dopo il termine *angoli* potrebbe far pensare che i poligoni regolari abbiano solo gli angoli *congruenti*, o addirittura che esista una improbabile relazione di uguaglianza fra i lati e gli angoli di un poligono regolare. In questi casi sarebbe più opportuno evitare l'ellissi dell'aggettivo e ripetere l'informazione, specificando: "... tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza", oppure "... sia i lati sia gli angoli congruenti", o ancora ... i lati congruenti e gli angoli congruenti". L'ordine delle parole e le associazioni che, involontariamente, certi accostamenti inducono sono dunque elementi da considerare con attenzione.

Analogo è il seguente esempio (Fig. 23, 6_5, p. 332), in cui i lati non possono essere contemporaneamente *paralleli* e *perpendicolari*, dato che queste due relazioni sono esclusive, benché la lettura induca a pensarla così, come se le informazioni si aggiungessero l'una all'altra ("lati paralleli, perpendicolari e..."):

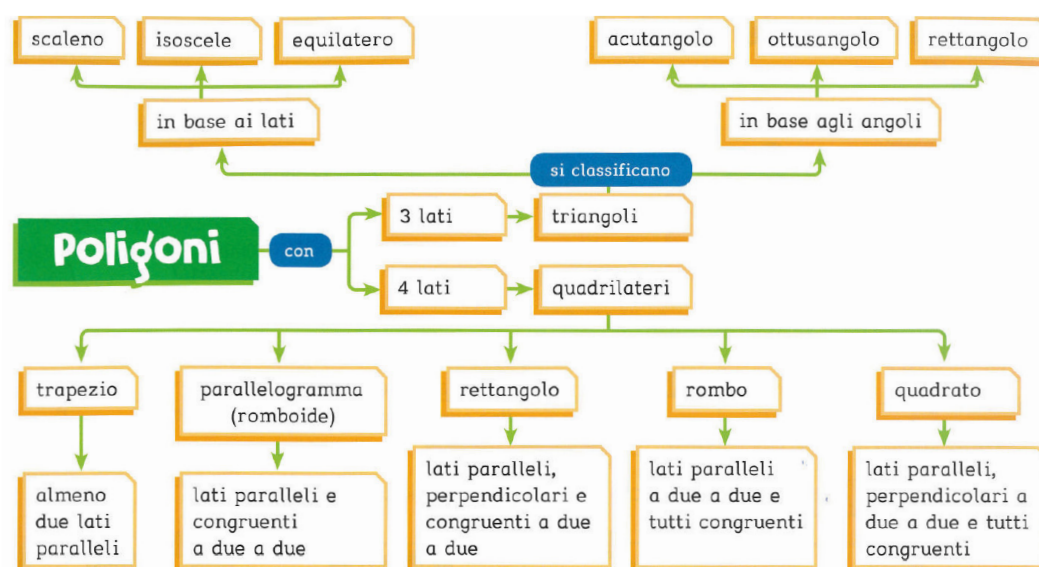


Fig. 23 – Esempio di *complessità morfosintattica* (V primaria).

Riguardo alla sintassi, evidenziamo, poi, la presenza di strutture complesse, che rendono la formulazione della frase artificiosa. Come già sottolineato nei capitoli precedenti, ciò comporta un alto impegno cognitivo. Ma non solo: il ricorso a una sintassi complessa dà al lettore l'immagine di una lingua speciale particolarmente

criptica e rigida, di un sottocodice per nulla amichevole, cosa che in parte può essere giustificabile (l'idea non è quella di semplificare ad ogni costo), ma su cui è necessario riflettere quando i destinatari sono bambini e ragazzi ai primi approcci con la disciplina.

A riguardo, a livello qualitativo è interessante isolare un caso ricorrente, particolarmente lampante da questo punto di vista, e cioè la seguente struttura linguistica: proposizione principale con verbo impersonale (*Si dice...*) + subordinata di I grado completiva soggettiva (*che...*), che possiamo osservare in un caso come questo:

- (7) Nei primi due casi si dice che il **poligono** è **inscritto in una circonferenza** oppure che **la circonferenza** è **circoscritta al poligono**. (c3_7, p. 116)

Altre espressioni che coinvolgono la forma verbale *si dice*, come abbiamo visto nel **capitolo 6**, sono molto ricorrenti soprattutto nelle definizioni:

- (8) Si dice poligono la parte di piano delimitata da una spezzata chiusa semplice. (1_6, p. 520)

Simili stilemi sintattici, oltre ad essere ricorrenti nei manuali, sono spesso utilizzati dai docenti in classe: in questo modo si rinforza l'idea di una disciplina il cui linguaggio è denso di modi linguistici artificiosi, che vengono tuttavia adottati dagli allievi, i quali li credono semplicemente corretti e indispensabili, da usare obbligatoriamente nelle ore di matematica per parlare della disciplina. D'altronde, il libro di matematica è uno dei pochi che li utilizza.

Inoltre, come abbiamo visto parlando di organizzazione informativa e di lessico nei capitoli precedenti, si trovano costrutti linguistici particolarmente *densi* di informazioni e poco fruibili da un allievo che si avvicina per la prima volta al tema. Se è vero che la *densità informativa* è un tratto tipico del linguaggio della matematica, sul piano didattico occorre osservarne di volta in volta le implicazioni, soprattutto distinguendo i casi nei quali è inevitabile (e bisogna dunque aiutare l'allievo ad accostarsi a essa e a gestirla) da quelli in cui è la veste linguistica ad appesantire il contenuto (e la cosa potrebbe essere gestita in modo più proficuo adottando uno stile diverso).

L'esempio seguente permette di elaborare alcune riflessioni:

- (9) Scelta come unità di misura per le aree il quadrato il cui lato è uguale all'unità di misura assunta per le lunghezze è possibile scomporre il rettangolo in un numero di quadrati uguali al prodotto della misura delle sue dimensioni. (10_7, p. 78)

Qualsiasi lettore, tanto più se non è un esperto di matematica, troverà faticosa la lettura e la comprensione del periodo, che, pur non essendo lunghissimo, è particolarmente complesso da gestire: inizia con una forma nominale del verbo (il participio passato), è affollato di informazioni e, oltretutto, privo di punteggiatura, che aiuterebbe a orientare e a capire la costruzione logico-sintattica (sarebbe appropriata una virgola dopo *lunghezze*). È poi oneroso per il lettore perché impone collegamenti tra elementi distanti, come la riconduzione del possessivo *sue* al suo referente (= “del rettangolo”). Infine, va anche rilevato un errore di accordo, che complica ulteriormente l’interpretazione: *uguali*, nella seconda riga, dovrebbe essere *uguale*, riferito a *numero*; si può presupporre che l’autore abbia commesso un refuso per trascinamento con la più vicina parola *quadrati*, cosa che conferma la complessità del testo, di difficile controllo già in fase di scrittura.

Le modalità di intervento per rendere il testo più semplice per chi legge sono molte e vanno osservate caso per caso, a partire dall’individuazione delle cause della complessità, in modo da riflettere sulla leggibilità dei testi e sulle conseguenze in termini di comprensione. Spesso può essere consigliabile utilizzare frasi più corte; in altri casi può essere invece utile lavorare sull’uso attento dei connettivi. Inoltre “frasi corte” non basta: occorre riflettere in termini di densità, più che di lunghezza/brevità; frasi che non propongono troppi concetti tutti insieme e in cui sono chiari i riferimenti ad altri elementi del testo rappresentano un buon punto di partenza per proporre testi agevolmente comprensibili. Cosa che non significa allontanare a tutti i costi gli allievi da una sana complessità, ma non gravarli di quella tanto evitabile quanto inutile. In questa prospettiva, sono significative le indicazioni offerte in Piemontese (1991) e soprattutto in Zambelli (2014, pp. 331-332), che segnala, tra i vari elementi utili per rendere più leggibile un testo, il «lessico disciplinare specifico riconoscibile e spiegato», i «periodi brevi», i «periodi di struttura lineare», l’«assenza – o scarsità – di forme a incastro all’interno del periodo»; ricorda poi che un testo è più comprensibile se «non è troppo denso sotto il profilo informativo» e se «le inferenze sono adeguate alle conoscenze dei lettori». Tutti elementi su cui la manualistica scolastica, nel nostro caso quella matematica, mostra di avere ancora molta strada da fare.

8.3 Elementi grafico-figurali

All’interno di questa categoria sono stati evidenziati quattro fenomeni che risultano interessanti da analizzare sia dal punto di vista didattico sia da quello matematico.

I quattro fenomeni sono i seguenti:

- *rappresentazioni figurali fuorvianti o errate di enti geometrici*: rappresentazioni figurali non adatte a descrivere le caratteristiche di enti geometrici;

- *elementi grafici o figure che non veicolano un messaggio corretto*: elementi grafici o figure poco chiare, non complete, o che omettono alcune informazioni fondamentali per la comprensione;
- *notazioni fuorvianti o incoerenti*: notazioni fuorvianti o incoerenti rispetto al contesto in cui sono inserite;
- *incoerenza tra elementi grafico-figurali e componente linguistica del testo*: presenza di incoerenze tra ciò che viene dichiarato verbalmente nel testo e ciò che viene rappresentato graficamente attraverso diagrammi, schemi, immagini o figure.

Tali fenomeni sono stati riscontrati nel corpus italiano secondo la seguente distribuzione:

	II-III SP		IV-V SP		I-II-III SSPG	
	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico	Punto di vista matematico	Punto di vista didattico
Rappresen- tazioni figurali fuorvianti o errate di enti geometrici	35 (64,81%)	0 (0%)	236 (36,82%)	0 (0%)	312 (24,13%)	0 (0%)
Elementi grafici o figure che non veicolano un messaggio corretto	3 (5,56%)	42 (85,72%)	73 (11,39%)	68 (29,69%)	86 (6,65%)	66 (51,16%)
Notazioni fuorvianti o incoerenti	9 (16,67%)	4 (8,16%)	207 (32,29%)	158 (69,00%)	494 (38,21%)	55 (42,64%)
Incoerenza tra elementi grafico-figurali e componente linguistica del testo	7 (12,96%)	3 (6,12%)	125 (19,50%)	3 (1,31%)	401 (31,01%)	8 (6,20%)
TOTALE	54 (100%)	49 (100%)	641 (100%)	229 (100%)	1'293 (100%)	129 (100%)

Tab. 6 - Risultati quantitativi degli *elementi grafico-figurali* rilevati nei libri di testo italiani.

Dalla tabella emerge che la sottocategoria *rappresentazioni figurali fuorvianti o errate di enti geometrici* è particolarmente presente, per quanto concerne il

punto di vista matematico, in entrambi i livelli scolastici; nella scuola secondaria di primo grado risultano piuttosto critici dal punto di vista matematico anche l'utilizzo delle *notazioni* e l'*incoerenza tra elementi grafico-figurali e componente linguistica del testo*.

8.3.1 Rappresentazioni figurali fuorvianti o errate di enti geometrici

Alcune delle criticità descritte precedentemente trovano espressione grafica nelle rappresentazioni fuorvianti o errate che spesso si individuano nei libri di testo. Ad esempio, i concetti di *superficie/area* e *contorno/perimetro*, anche qualora siano definiti correttamente, sono a volte accompagnati da una rappresentazione figurale inesatta, come è mostrato nei seguenti due esempi tratti dallo stesso libro (Fig. 24a, c5_3, p. 85; Fig. 24b, c5_3, p. 86).

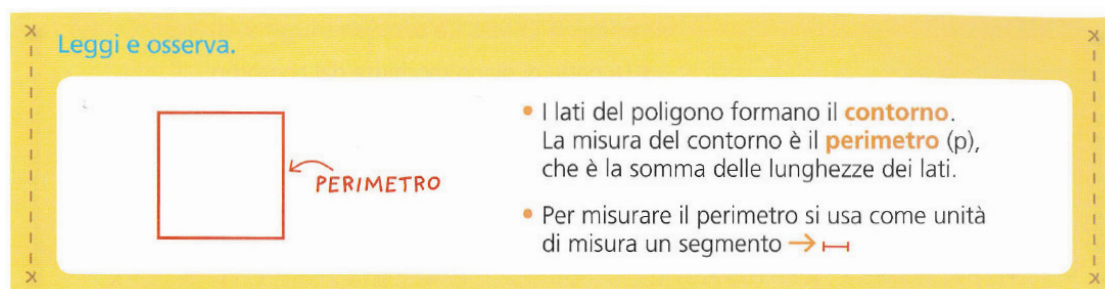


Fig. 24a – Esempio di *rappresentazione figurale errata* del perimetro (III primaria).

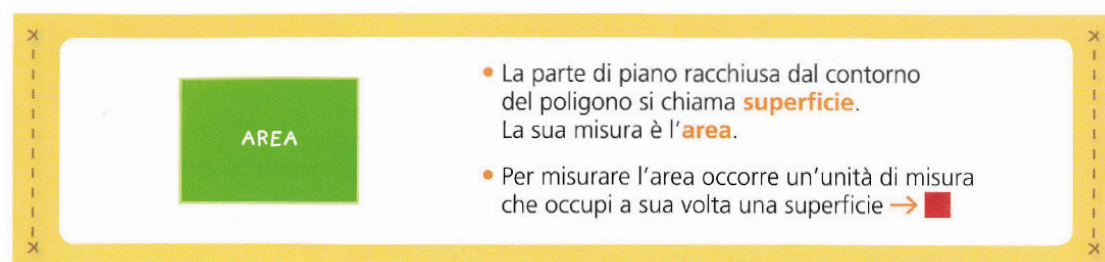


Fig. 24b – Esempio di *rappresentazione figurale errata* dell'area (III primaria).

In **Figura 24a** la linea rossa evidenziata da una freccia e dallo stesso colore con cui è scritta la parola "PERIMETRO", rappresenta il contorno del poligono e non la sua grandezza; analogamente in **Figura 24b** ciò che è colorato di verde non è l'area, ma la superficie di quel rettangolo.

Rappresentare erroneamente un concetto o utilizzare il registro figurale in contraddizione con quanto dichiarato verbalmente crea confusione in fase di apprendimento. D'altronde la ricerca evidenzia come alcune misconcezioni che spesso manifestano gli allievi derivino fortemente da scelte didattiche inefficaci e improprie presenti anche nei libri di testo (Sbaragli, 2005); per questa ragione è importante che ogni insegnante rifletta criticamente su tali aspetti prima di effettuare la trasposizione didattica. Un'analisi critica delle informazioni presenti nei libri di testo può essere importante anche come attività da proporre agli allievi in modo da indagare insieme a loro la presenza di eventuali errori di contenuto, o di scelte figurali o linguistiche problematiche. Il libro di testo diventerebbe, così, oggetto di osservazione critica e di discussione, incentivando l'abitudine a «interagire attivamente con l'informazione scritta» sostenuta nel *framework* PISA del 2018 (in Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2019, p. 34, traduzione degli autori) nel descrivere la *reading literacy*, ossia la competenza di lettura.

Tra gli esempi di misconcezioni evitabili (che dipendono dalla scelta univoca delle rappresentazioni figurali fornite agli allievi, a volte in contrasto con la definizione utilizzata), emblematico risulta il caso dell'*angolo*. Nella maggior parte dei libri di testo c'è la consuetudine di utilizzare una rappresentazione inefficace di angolo realizzata tramite un "archetto" che limita la parte di piano considerata e che quindi risulta in conflitto con la definizione che solitamente si fornisce di *angolo*, di cui si ha un esempio in (1):

- (1) gli angoli interni sono le parti di piano comprese fra due lati consecutivi. (3_4, p. 327)

Tale definizione mette in luce una caratteristica dell'angolo ben precisa, l'illimitatezza, proprietà che non è certo manifesta nella comunissima rappresentazione tramite "archetto", di cui qui di seguito si riportano tre esempi tratti da libri di vari livelli scolastici (**Fig. 25a**, 12_3, p. 89; **Fig. 25b**, 2_4, p. 336; **Fig. 25c**, 5_6, p. 226):

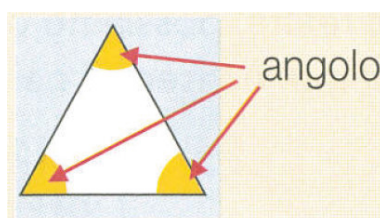


Fig. 25a – Esempio di *rappresentazione figurale fuorviante* dell'angolo (III primaria).

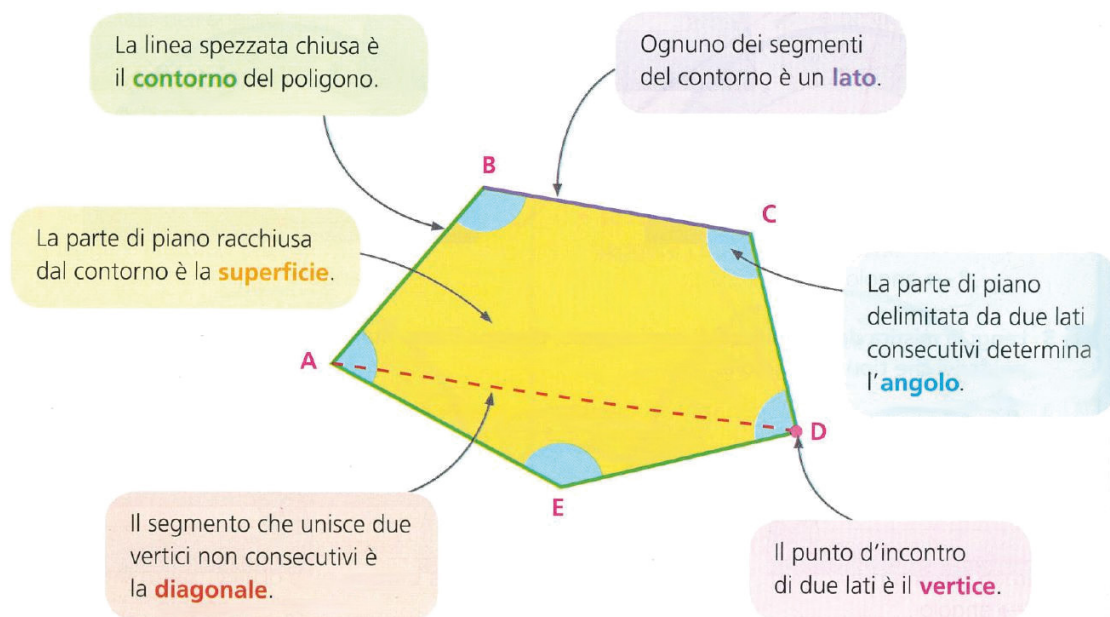


Fig. 25b – Esempio di *rappresentazione figurale fuorviante* dell'angolo (IV primaria).

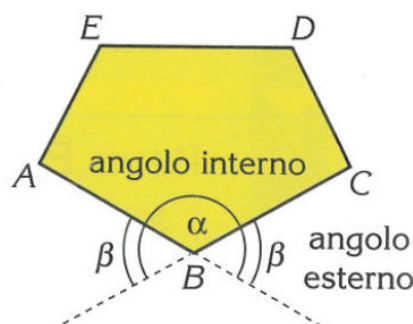


Fig. 25c – Esempio di *rappresentazione figurale fuorviante* dell'angolo (I secondaria di primo grado).

L'uso dell'"archetto", a volte rimarcato dalla freccia che indica il vertice o la zona circostante (Figg. 25a, 25b, 25c), accentua la misconcezione, presente nei bambini fin dai primi livelli scolastici, che l'*angolo* sia un punto, un arco o una parte di piano circoscritta e limitata, rafforzata anche dall'uso della parola *angolo* nel contesto quotidiano (Demartini, Fornara & Sbaragli, 2018; Sbaragli & Santi, 2012).

Un altro oggetto geometrico che non sempre viene trattato in modo opportuno dal punto di vista figurale è l'*asse di simmetria* che, anche se definito linguisticamente in modo corretto come una particolare retta, viene poi rappresentato come uno specifico segmento, come nel seguente esempio (Fig. 26, 10_4, p. 321):

L'**asse di simmetria** è la retta che divide una figura in due metà perfettamente sovrapponibili e speculari.

In un quadrilatero possono esserci uno o più assi di simmetria...



Fig. 26 – Esempio di *rappresentazione figurale errata* dell'asse di simmetria (IV primaria).

In questo caso sarebbe stato opportuno tracciare i prolungamenti di ciascun asse, tramite ad esempio tre o più puntini, per indicare graficamente la corretta natura dell'oggetto.

Oltre a questo aspetto, osserviamo un'altra criticità che comporta il consolidarsi di misconcezioni note in didattica della matematica: l'ultimo poligono in **Figura 26** appare come un quadrato ruotato di 45° , ma se fosse un quadrato gli assi di simmetria sarebbero 4 e non 2 come indicato. Sembra più verosimile che l'autore volesse rappresentare un rombo generico (non quadrato) che effettivamente ha 2 soli assi di simmetria, ma la somiglianza con un quadrato ruotato comporta una inesattezza dal punto di vista matematico che risulta di ostacolo all'apprendimento, dato che porta gli allievi a immaginare un rombo come una figura con una particolare posizione vincolante, ossia con gli assi (le diagonali) *orizzontali* e *verticali* (Sbaragli, 2006b). L'idea, erronea, che si ha un quadrato quando i lati sono orientati in orizzontale e verticale, e che si ha un rombo se si ruota di 45° è frequente negli allievi della scuola dell'obbligo (soprattutto di primaria) e una trattazione superficiale anche dal punto di vista grafico di un libro di testo non può fare altro che rafforzare tale modello.

In altri casi, invece, si sono registrati errori nei libri di testo che sembrano sviste tipografiche, come nel seguente esempio, in cui la linea tratteggiata in azzurro non rappresenta l'altezza relativa al lato azzurro del poligono (**Fig. 27**, 11_5, p. 316):

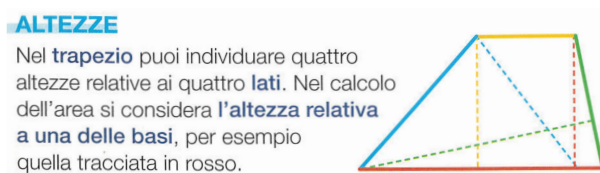


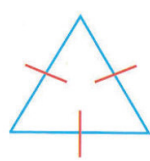
Fig. 27 – Esempio di *rappresentazione figurale errata* di altezza (V primaria).

8.3.2 Elementi grafici o figure che non veicolano un messaggio corretto

Come già emerso nei paragrafi 3.3 e 5.5.2, la componente grafica riveste un ruolo di fondamentale importanza all'interno di un libro di testo; tuttavia, imprecisioni, incoerenze o anche solo layout particolarmente caotici seppur corretti rischiano di non supportare adeguatamente lo studente, o di non fornire gli elementi per costruire un sapere corretto e coerente.

Nella pratica didattica capita spesso che l'allievo fornisca giustificazioni o spiegazioni di un determinato aspetto geometrico affidandosi esclusivamente alla percezione visiva di una data rappresentazione figurale ("È così perché si vede dalla figura"). In ambito geometrico si osserva nei primi anni di scolarizzazione il prevalere degli aspetti figurali su quelli concettuali, più complessi da essere assimilati. Eppure, come ha mostrato Fischbein (1993) nella *teoria dei concetti figurali*, tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali (idealità, astrattezza, generalità e perfezione) e figurali (forma, posizione e grandezza), intrinsecamente legati tra loro. Dunque, se in fase di apprendimento le seconde prevalgono nettamente sulle prime, l'allievo non sarà in grado di controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure. Per questo motivo è molto importante stimolare le capacità argomentative e definitorie degli allievi anche dal punto di vista linguistico, in modo tale che la rappresentazione figurale non diventi vincolante e univoca. In quest'ottica non appaiano buone scelte didattiche quelle, adottate da alcuni libri di testo, di delegare solo alle rappresentazioni figurali accompagnate da nomenclatura la definizione degli oggetti geometrici coinvolti (Fig. 28, 10_5, p. 341).

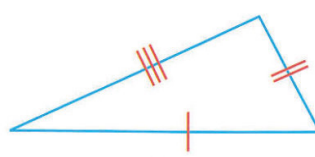
Secondo le misure dei lati, un triangolo può essere:



equilatero

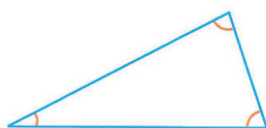


isoscele

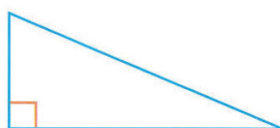


scaleno

In base alla misura degli **angoli**, può essere:



acutangolo



rettangolo



ottusangolo

Fig. 28 – Esempio di figure che risultano limitanti (V primaria).

Non avendo mai specificato nel libro che cosa si intende per triangolo equilatero, isoscele o scaleno, l'allievo è costretto a dedurre le caratteristiche dalla decodifica di scelte figurali entrate nell'uso convenzionale, che tuttavia risultano limitanti se non accompagnate da definizioni nel registro linguistico, essendo legate a un unico rappresentante. Si pensi ad esempio all'idea spesso radicata negli allievi che i due lati congruenti del triangolo isoscele debbano essere necessariamente posizionati *obliqui* rispetto al lettore, o al vincolo dato dalla rappresentazione figurale di non lasciare spazio alla possibile classificazione che vede il triangolo equilatero come un caso particolare di triangolo isoscele, gestita in modo linguistico tramite l'avverbio *almeno* ("Un triangolo è isoscele se ha *almeno* due lati della stessa lunghezza"), presente 14 volte nel corpus (in 12 testi diversi). Ancora più delicata appare la rappresentazione della classificazione dei triangoli in base agli angoli, dato che gli elementi grafici (inadatti e non sempre presenti) utilizzati per evidenziare i diversi tipi di angoli non differenziano tra angolo acuto e angolo ottuso.

Un altro aspetto che frequentemente si ritrova nei libri di testo (specialmente per le prime classi scolastiche) è la presenza di rappresentazioni figurali che mostrano solo *poligoni regolari* all'interno della sezione dedicata ai *poligoni generici* (Fig. 29, c3_4, p. 294). Questo potrebbe rafforzare l'idea che, soprattutto per i poligoni con un numero di lati maggiore di 4, esistano solo *poligoni regolari*. È utile invece fornire esempi diversi in modo da favorire il riconoscimento di determinati *poligoni* anche quando sono *generici* o *concavi*.

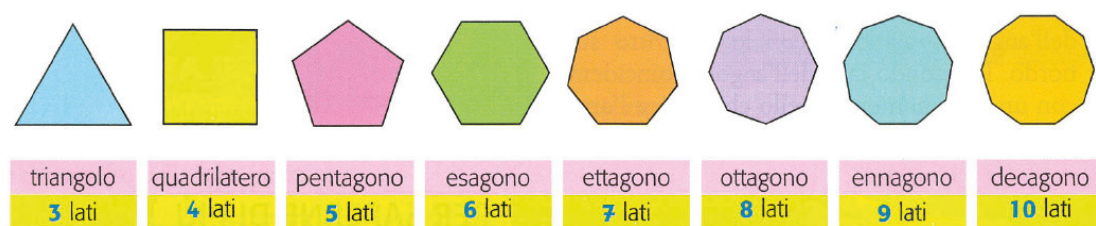


Fig. 29 – Esempio di *figure stereotipate* per i poligoni generici (IV primaria).

8.3.3 Notazioni fuorvianti o incoerenti

Come affermano D'Amore e Fandiño Pinilla (2012), la designazione, ossia indicare qualcosa opportunamente, è un fatto relativo e non assoluto; tuttavia, alcune convenzioni sono entrate a far parte della comunicazione scritta matematica. Ad esempio, è ormai convenzionale indicare un segmento con due lettere maiuscole che rappresentano i suoi (punti) estremi (AB) e scrivere \overline{AB} per indicare la misura o

la lunghezza del segmento. Al di là delle scelte convenzionali che adotta il libro, è importante che ci sia coerenza nell'intero testo.

In alcuni libri sono state riscontrate scelte incoerenti, come nel seguente esempio (Fig. 30, c2_3, p. 100), in cui la stessa notazione indica i segmenti (i lati) e la loro misura (la lunghezza dei lati per ottenere il perimetro, precedentemente definito come la misura del contorno).

Conosci già molte cose sui poligoni.

Di un poligono hai scoperto:

I **lati** $\overline{AB} \overline{BC} \overline{CD} \overline{DE} \overline{EA}$

I **vertici** $A B C D E$

Gli **angoli** $\hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} \hat{e}$

Il **perimetro** $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$

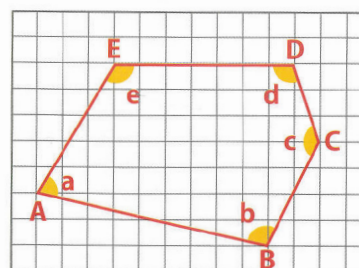


Fig. 30 – Esempio di *notazioni incoerenti* per i lati e le relative lunghezze (V primaria).

Analogo è il seguente esempio (piuttosto diffuso nel corpus), probabilmente legato all'esigenza di non utilizzare una *varietà di notazioni*, che però rischia di confondere gli allievi a livello concettuale: viene utilizzata la stessa notazione sia per indicare un oggetto geometrico sulla figura (il lato, in questo caso) sia la sua lunghezza all'interno della formula del perimetro (Fig. 31, 1_4, p. 336). In questo modo la stessa *notazione* designa concetti geometrici diversi tra loro.

STRATEGIE PER...

calcolare il perimetro dei triangoli

- Leggi e impara le formule del perimetro dei triangoli.

	triangolo rettangolo	triangolo equilatero	triangolo isoscele
figure			
formule	$P = l_1 + l_2 + l_3$	$P = l \times 3$	$P = b + (l \times 2)$

Fig. 31 – Esempio di *notazioni incoerenti* (IV primaria).

Un altro esempio di *incoerenza di notazione* è quello di **Figura 32** (16_5, p. 309), in cui si utilizzano simboli differenti (ℓ_1 , ℓ_2 , b e h) per le stesse grandezze geometriche (le *lunghezze* dei lati) a seconda che si parli di perimetro o di area del rettangolo. In realtà, b e h nel caso del rettangolo coincidono con le lunghezze dei lati consecutivi: non sarebbe stato dunque necessario introdurre una notazione differente, inducendo gli allievi a pensare che si tratti di grandezze diverse.

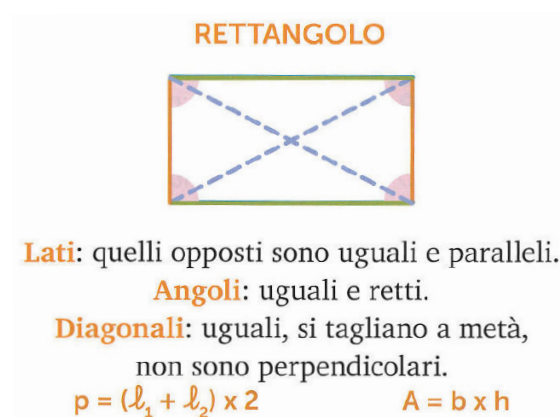


Fig. 32 – Esempio di *notazioni incoerenti* di grandezze (V primaria).

Si rilevano poi casi in cui la scelta della *notazione non* è *corretta*, come nel seguente esempio, in cui con la lettera ℓ rappresentata in rosso corsivo si indicano le lunghezze dei tre lati che possono anche avere lunghezze diverse tra loro (**Fig. 33**, 7_5, p. 273). Sarebbe stato opportuno indicare le tre lunghezze dei lati con notazioni diverse, per poi eventualmente riflettere su come poteva variare la relazione in base alle caratteristiche del triangolo.

Il **triangolo** è un poligono con tre lati e con tre angoli. Vi sono, però, vari tipi di triangoli che si possono classificare in base alle caratteristiche dei lati o degli angoli.

CALCOLARE IL PERIMETRO

- Il **perimetro** dei triangoli si calcola sommando le misure dei lati: $P = \ell + \ell + \ell$

Fig. 33 – Esempio di *notazioni scorrette* (V primaria).

Vi sono inoltre casi in cui le *notazioni* non sono di per sé né scorrette né incoerenti, ma risultano particolarmente *inadatte, fuorvianti*, in quanto potrebbero veicolare un significato matematicamente diverso: in **Figura 34** (14_5, p. 310), ad esempio, si utilizza l^2 per indicare un particolare lato, ma tale notazione potrebbe rappresentare anche l'elevamento alla seconda del lato.

Collega ogni quadrilatero alle corrispondenti formule inverse per calcolare i lati mancanti.

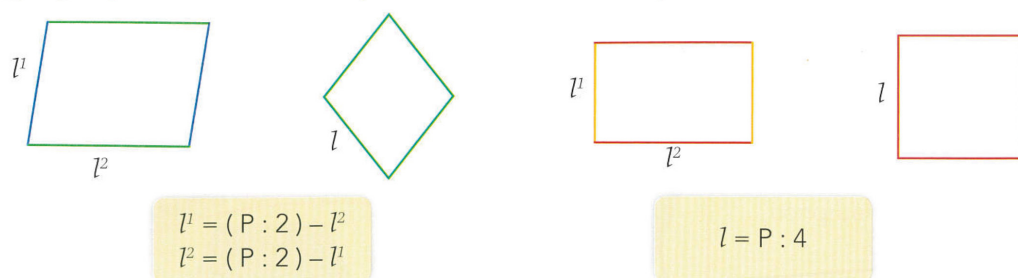


Fig. 34 – Esempio di *notazioni ambigue* dal punto di vista matematico (V primaria).

In questa categoria segnaliamo anche l'uso di *notazioni senza alcun riferimento al loro significato*. Ciò è particolarmente diffuso nelle sezioni di riepilogo, oppure in occasione della ripresa del tema in vista di un approfondimento, dove non è raro trovare schemi come quello mostrato in **Figura 35** (4_5, p. 75), in cui la mancanza di un qualche riferimento (linguistico o figurale) al significato delle lettere utilizzate per designare una data grandezza rende lo schema una sterile raccolta di formule di dubbio valore, non essendo ben visibili gli elementi a cui si riferiscono. Sarebbe almeno opportuno accompagnare queste formule con una legenda preposta a chiarire il significato delle lettere utilizzate.

	POLIGONI	FORMULE DIRETTE	FORMULE INVERSE	spiegazione
EQUILATERI	triangolo equilatero	$P = l \times 3$	$l = P : 3$	<ul style="list-style-type: none"> Poiché i lati sono uguali, basta dividere il perimetro per il numero dei lati.
	rombo e quadrato	$P = l \times 4$	$l = P : 4$	<ul style="list-style-type: none"> La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.
SCALENI	triangolo scaleno	$P = l_1 + l_2 + l_3$	$l_1 = P - l_2 - l_3$ $l_2 = P - l_1 - l_3$ $l_3 = P - l_1 - l_2$	<ul style="list-style-type: none"> Conoscere il perimetro non basta: poiché i lati sono diversi, per trovarne uno dobbiamo conoscere gli altri.
	trapezio scaleno e trapezio rettangolo	$P = B + b + l_1 + l_2$	$B = P - b - l_1 - l_2$ $b = P - B - l_1 - l_2$ $l_1 = P - B - b - l_2$ $l_2 = P - B - b - l_1$	<ul style="list-style-type: none"> Poiché la formula diretta è un'addizione con più di due addendi, come operazioni inverse abbiamo più sottrazioni.
ISOSCELI	triangolo isoscele	$P = l \times 2 + b$	$l = (P - b) : 2$ $b = P - (l \times 2)$	Sono "una via di mezzo" tra i casi precedenti.
	trapezio isoscele	$P = (l \times 2) + B + b$	$l = [P - (B + b)] : 2$ $B = P - l \times 2 - b$ $b = P - l \times 2 - B$	
	romboide e rettangolo	$P = (b + l) \times 2$	$l = P : 2 - b$ $b = P : 2 - l$	

Fig. 35 – Esempio di notazioni senza alcun riferimento al loro significato (V primaria).

8.3.4 Incoerenza tra elementi grafico-figurali e componente linguistica del testo

Come è già emerso, vi sono casi in cui il registro linguistico e quello figurale sono incoerenti tra loro: ciò che si afferma o descrive a parole non trova un corrispondente nell'immagine che lo accompagna. Le trattazioni dei concetti di *area*, *perimetro*, *asse*, *altezza* citati in precedenza ne sono degli esempi. Di seguito si mostra un ulteriore esempio legato a una sistemazione logica degli elementi che dal punto di vista linguistico sceglie un tipo di classificazione, mentre ne utilizza un'altra dal punto di vista grafico-figurale. All'interno del tema *poligoni* è centrale la *classificazione dei quadrilateri*, che è un argomento affrontato in entrambi i livelli scolastici. Tale classificazione viene proposta attraverso diversi approcci, rappresentazioni e definizioni. In **Figura 36** (10_5, p. 336) si mostra una rappresentazione della *classificazione dei quadrilateri* attraverso il diagramma di Eulero-Venn. Tuttavia, analizzando le definizioni di tali quadrilateri presenti nello stesso libro, emerge l'*incoerenza tra la componente linguistica del testo e la rappresentazione grafico-figurale*: il trapezio è definito come il quadrilatero che ha due lati paralleli, intendendo implicitamente che abbia *esattamente* due lati paralleli; il parallelogramma è invece definito come il quadrilatero che ha *due coppie* di lati paralleli. In questo modo la rappresentazione insiemistica che li vede uno il sottoinsieme dell'altro, rappresentata in modo figurale di seguito alle definizioni, risulta *incoe-*

rente con il testo, in quanto il parallelogramma non può essere considerato un caso particolare di trapezio.

I quadrilateri

I quadrilateri sono poligoni con 4 lati.

In base alle caratteristiche dei lati e degli angoli prendono nomi diversi:

- **trapezi**: hanno una coppia di lati paralleli;
- **parallelogrammi**: hanno due coppie di lati paralleli;
- **rettangoli**: hanno quattro angoli retti;
- **rombi**: hanno quattro lati congruenti;
- **quadrati**: hanno quattro angoli e quattro lati congruenti.

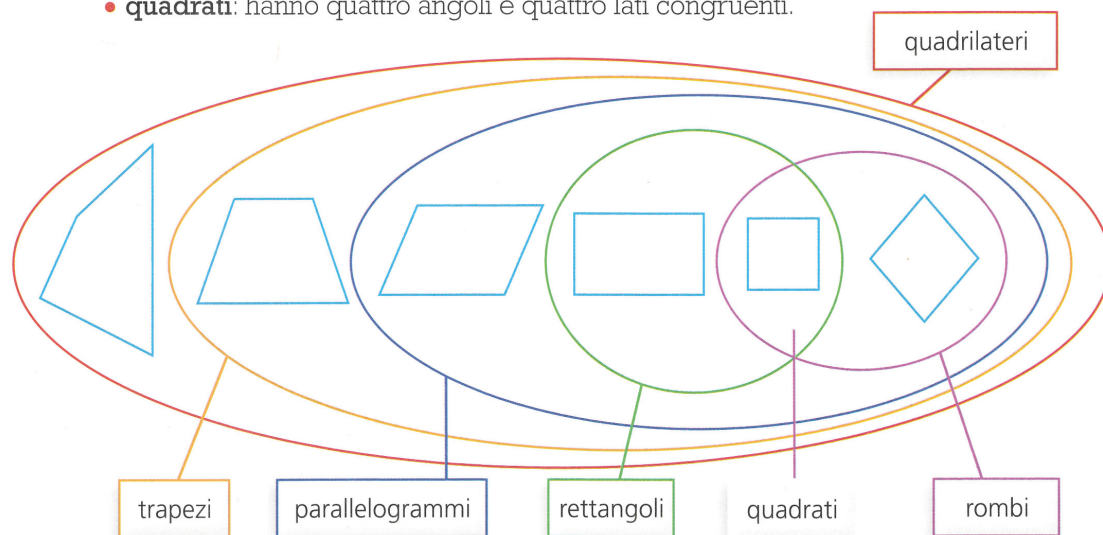


Fig. 36 – Esempio di *incoerenza tra elementi grafico-figurali e componente linguistica del testo* (V primaria).

La rappresentazione sarebbe stata coerente con la forma verbale se la definizione del trapezio avesse contenuto l'avverbio *almeno* "**trapezi**: hanno *almeno* una coppia di lati paralleli", ma ciò non avviene in questo testo. Quest'ultimo caso conferma, in chiusura di capitolo, l'importanza disciplinare di un lessico preciso rispetto ai vari tipi di parole in gioco: terminologia specialistica, ma anche altre parole funzionali, fondamentali per determinare la corretta semantica. Parole che non solo vanno proposte efficacemente nei testi e nell'uso in classe, ma rispetto alle quali andrebbe consolidata e verificata la conoscenza degli allievi, che spesso non solo faticano con il lessico specialistico, ma anche con altre parole con cui non è detto che abbiano familiarità. Il testo scientifico è, dunque, una palestra per allenare la competenza lessicale nell'insieme.

Per concludere: il testo scolastico di matematica e i suoi fruitori

Carlo Bernardini, ordinario di metodi matematici della fisica, scriveva così al linguista Tullio De Mauro nel libro-dialogo fra i due:

Manuali scolastici disciplinari elementari. Questi sono in genere quanto di peggio si possa trovare, specie i più adottati nelle scuole. Sono pedanti e, generalmente, lontani da qualsiasi forma di godimento intellettuale. Costituiscono un esempio di linguaggio ufficiale deliberatamente deprecabile, nel senso in cui lo si dice degli «x-ese»: del burocratese o del sindacalese o del pedagoghese [...]. Bisognerà che, nell'inoltrato terzo millennio della storia dopo Cristo una impennata di civiltà renda leggibili i manuali scolastici.

(Bernardini & De Mauro, 2003, pp. 28-29).

Passando in rassegna i vari tipi di testo scientifico, quando arriva al libro scolastico, i toni dell'autore sono provocatori e un po' estremi, e la condanna sembra senza appello, come spesso accade per questo tipo di testi; simili critiche, infatti, richiamano quelle, altrettanto diffuse, ai libri di grammatica, spesso ritenuti fuori tempo rispetto alla realtà linguistica e paludati nelle loro esagerate classificazioni. Il "godimento intellettuale" di cui parla Bernardini, che per i bambini e i ragazzi che vanno a scuola potrebbe essere parafrasato con il "piacere nell'apprendere", sembra qualcosa di estraneo al testo scolastico: dura condizione per questo tipo di opere, condannate a esserci (quasi) sempre, prima o poi, in un percorso formativo, e, allo stesso tempo, esposte a critiche, a volte inutilizzate o adoperate solo come eserciziaro o come supporto secondario, mentre altre – all'opposto – utilizzate come unico, indiscusso e immutabile supporto all'apprendimento. Considerazioni, queste, che portano a porsi alcuni interrogativi rispetto alla bontà di tali testi e alle loro caratteristiche e che spingono a trovare risposte e alternative, come è avvenuto per il progetto in oggetto.

Al termine di questo volume, dopo aver esaminato e illustrato a fondo, quasi sezionato nelle varie componenti, il tema dei *poligoni* nei testi scolastici di matematica, da più punti di vista, è possibile leggere la citazione sopra riportata con maggiori consapevolezza e motivazione. Abbiamo infatti scoperto che i testi di matematica che si propongono agli allievi di scuola primaria e secondaria di primo grado sono solo in apparenza opere tranquille, mentre presentano al loro interno un profilo linguistico-disciplinare particolare, in cui si manifestano le più complesse caratteristiche del linguaggio della matematica (nella sua varietà specifica per questi livelli scolastici), insieme a una testualità non subito evidente (basti pensare all'alternarsi di macroatti e di microatti peculiari) e a un lessico caratteristico, denso di vocaboli specialistici. Opere tutt'altro che semplici per i destinatari, che spesso

non parlano né la lingua dell'uso degli allievi né quella di cui si servono nella loro mente per il ragionamento (Bernardini, 1997); lingua che, inoltre, non è neppure sempre coerente e precisa sul piano disciplinare. Si è inoltre rilevato come vi siano bruschi salti di complessità di forme testuali e linguistiche nei vari cambi di adozione dei libri scolastici italiani (dalla III alla IV primaria e dalla V primaria alla I secondaria di primo grado) che non tengono conto dello sviluppo cognitivo degli allievi e che è bene non ignorare a livello didattico.

In contesto scolastico e, ancor più spesso, in sede di monitoraggio delle competenze, si parla spesso di *poor reader* e di *poor comprehender* riferendosi a soggetti che manifestano difficoltà di lettura e comprensione non dovute a deficit cognitivi, ma piuttosto a una limitata capacità di ricostruire rappresentazioni semantiche integrate ed efficaci. Dai risultati emersi, viene invece spontaneo ribaltare la prospettiva e chiedersi se non è il libro a essere povero di qualcosa: di formulazioni coerenti, chiare e accurate, di attenzione alle competenze dei destinatari, di supporti all'argomentazione, di cura nei passaggi da un livello di conoscenza all'altro ecc. Infatti, sebbene oggi i testi siano sempre più vicini agli allievi, ricchi di riferimenti alle competenze previste dalle varie Indicazioni e Piani di studio, di esercizi e di alcune attività che dovrebbero spingere a vivere esperienze laboratoriali, sul piano linguistico (che è quello profondo per la costruzione del ragionamento e dei concetti) e propriamente matematico, le prassi conservano ancora modi e stilemi discutibili, sui quali è necessario riflettere per individuare e sperimentare forme più efficaci.

Non si tratta di una via semplice da percorrere e, per farlo, un ruolo di primo piano spetta a chi si occupa di ricerca. Infatti, sono necessari ulteriori sforzi congiunti tra ricercatori in linguistica e ricercatori in didattica della matematica per sostenere e ampliare le analisi condotte, fra le altre, nell'ambito del progetto *Italmatica* qui presentato (e che avrà una continuazione), al fine di indagare maggiormente la comprensione degli allievi e di studiare, di conseguenza, formulazioni linguistiche più curate, adeguate ed efficaci. È infatti grazie a questo tipo di lavoro di ricerca interdisciplinare che si possono individuare quei nodi di difficoltà in parte intrinseci alla dimensione linguistica dell'apprendimento della matematica, da provare, poi, a sciogliere tenendo conto di tutti gli interlocutori coinvolti nel processo di insegnamento-apprendimento, in particolare gli allievi. Accanto a questo sforzo di analisi e di riformulazione, va incentivato un lavoro sinergico tra ricercatori e docenti per promuovere pratiche efficaci legate a come approcciarsi nei confronti del testo scolastico nella quotidianità della didattica.

Prima di tutto, per stimolare le abilità di confronto con il testo matematico, è necessario rendere il lettore critico, anche il docente stesso, e allo stesso tempo attivo e motivato nel processo cognitivo di lettura, comprensione ed eventualmente riformulazione (Bertolini, 2012): ciò è possibile vivendo significative e mirate esperienze che accompagnano la lettura del testo, insieme all'acquisizione

di un'abitudine costante a interrogarsi su ciò che si legge. È infatti fondamentale sollecitare nel lettore quelle abilità di controllo metacognitivo che consentono di riconoscere difficoltà, errori di comprensione, incongruenze, sollecitando così un atteggiamento sempre attento e critico nei confronti del testo. Anche di fronte al testo disciplinare, quindi, l'allievo e, ancor prima, il docente non dovrebbero essere riceventi passivi, ma figure critiche e attivi solutori di problemi, in quanto il testo stesso – con il suo bisogno di interpretazione – offre una costante situazione di *problem solving*, che come tale va gestita. D'altronde, come sosteneva De Mauro (2016b), comprendere un testo è una sfida e appropriarsi di un linguaggio disciplinare, insieme alla disciplina stessa, è una conquista; una conquista che passa anche attraverso la *metalinguisticità riflessiva*, cioè il sapersi interrogare oltre che sui contenuti anche sulla lingua della disciplina (Ferrerri, 2014).

Occorre infatti ricordare che il linguaggio della matematica è, in sé, complesso e lontano dalle abitudini comunicative degli allievi, ma necessario per apprendere pienamente la disciplina; per acquisirlo in profondità, il libro di testo non sempre aiuta: proprio per questo interrogarsi su di esso è estremamente utile, senza timore di discuterlo e magari di "smontarlo" per capire con gli allievi dove si annidano i principali luoghi di difficoltà e come, invece, si troverebbero più a loro agio, avendo anche il coraggio di riformularlo. In quest'ottica, è il docente stesso di matematica, possibilmente insieme a quello di italiano, a diventare ricercatore e a perseguire con i propri allievi nuove piste di lavoro proficue per costruire competenze di largo respiro. Tutto ciò in una prospettiva interdisciplinare (semplice e promettente a dirsi, ma ben più difficile a farsi) che vale la pena perseguire, ideando ad esempio laboratori *italmatici* dedicati ad approfondire con gli allievi specifici temi. Si potrebbero analizzare particolari macroatti o enunciati (come quelli *logico-argomentativi* o come le *definizioni*), oppure il lessico tecnico-specialistico (esaminando i termini più da vicino, indagando i diversi contesti d'uso, anche tramite ricerche sulle varie accezioni nell'italiano quotidiano o sulla loro origine etimologica, pensando agli studenti più grandi); si potrebbe incentrare il laboratorio sulla lettura critica del libro di testo, che potrebbe portare ad esempio alla riscrittura di parti significative secondo le scelte degli allievi, magari lavorando a piccoli gruppi (scelte che poi verrebbero discusse collettivamente e confrontate con l'originale per trovare eventuali lacune o incoerenze); o, ancora, sarebbe interessante lavorare sulle diverse scelte di vari libri di testo scolastici nel trattare uno stesso argomento matematico, per discutere insieme sull'efficacia o meno delle differenti proposte. E le prospettive di lavoro potrebbero essere ancora molte, sempre orientate a uno sviluppo sinergico delle competenze matematiche e linguistiche.

Tutto ciò con un auspicio di più vasta portata: che il dialogo interdisciplinare (oggi vivo e proficuo, come mostrano ad esempio le varie esperienze contenute in Colombo e Pallotti, 2014, in De Renzo e Piemontese, 2016, e in Sbaragli, 2021) riprenda

e attualizzi anche le ricerche sui libri di testo per la scuola, sulla scia di quanto fatto, ormai più di vent'anni fa, in Calò e Ferreri (1997), opera in cui numerosi contributi di studiosi dai profili diversi indagavano la lingua dei libri scolastici delle varie discipline, la leggibilità e la comprensibilità di essi, e le modalità d'uso, nell'ottica di affinare gli strumenti necessari per verificare l'adeguatezza della comunicazione rispetto ai destinatari. Questo impegno avrebbe un alto valore scientifico e porterebbe a importanti ricadute sia nel campo dell'insegnamento-apprendimento delle diverse discipline, sia in quello dell'educazione linguistica.

In concreto, pensando alla matematica, si getterebbero le basi per ripensare in profondità alla disciplina e a come dovrebbe essere trasposta attraverso il testo disciplinare per la scuola, seguendo l'ambizioso traguardo di produrre opere *felici*, nel senso di appropriate ed efficaci (prendendo a prestito per il nostro discorso il celebre concetto di Austin, 1962). Per realizzare ciò, è necessario che ricercatori e docenti delle due discipline lavorino in modo congiunto, cercando nuove strade basate sulla consapevolezza più profonda delle diverse componenti che interagiscono in questi testi; figli del passato disciplinare e scolastico, ma ancora presenti nella scuola di oggi, in cui possono continuare a giocare un ruolo significativo per le future generazioni di allievi.

Bibliografia

- Adoniou, M., & Qing, Y. (2014). Language, mathematics and English language learners. *The Australian mathematics teacher*, 70(3), 3-13.
- Altieri Biagi, M. L. (1978). *Didattica dell'italiano*. Edizioni scolastiche Mondadori.
- Amoruso, C. (2010). *In parole semplici. La riscrittura funzionale dei testi nella classe plurilingue*. Palumbo Edizioni.
- Andorno, C. (2005). *Cos'è la pragmatica linguistica*. Carocci.
- Antonelli, G. (2008). Dall'Ottocento a oggi. In B. Mortara Garavelli (A cura di), *Storia della punteggiatura in Europa* (pp. 178-210). Laterza.
- Aristotele (1996). *Organon. Vol. 2* (Edizione critica di M. Zanatta). UTET.
- Austin, J. L. (1962). *How to Do Things with Words*. Oxford University Press.
- Bagni, G. T. (1996). *Storia della matematica. Dall'Antichità al Rinascimento. Vol. 1*. Pitagora.
- Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*. Pitagora.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de Collège* [Thèse d'état, Université Joseph Fourier].
- Balacheff, N. (2001). *Imparare la prova*. Pitagora.
- Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 501-512.
- Balboni, P. (2007). Didattica delle microlingue e uso veicolare della lingua: il ruolo della traduzione. In P. Mazzotta & L. Salmon (A cura di), *Tradurre le microlingue scientifico-professionali. Riflessioni teoriche e proposte didattiche* (pp. 49-63). UTET Università.
- Barrow, M. A. (2014). Even math requires learning academic language, *Kappan Magazine*, 95(6), 35-38. <http://www.lindareedclassroom.com/teaching-resources/ewExternalFiles/Academic%20Vocabulary%20in%20Math.pdf>
- Bassani, P., Fioravanti, E., Pelillo, M., & Pozio, S. (2012). Le prove INVALSI di matematica nella prima e nella terza classe della scuola secondaria di primo grado (Prova

- nazionale). *Quaderni SNV – N. 3/2012 MAT*. S. https://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N3_MAT.pdf
- Bateman, J. A. (2008). *Multimodality and Genre. A Foundation for the Systematic Analysis of Multimodal Documents*. Palgrave Macmillan.
- Bateman, J. A., Delin, J., & Allen, P. (2000). Constraints on layout in Multimodal Document Generation. In *Proceedings of the First International Natural Language Generation Conference, Workshop on Coherence in Generated Multimedia* (Mitzpe Ramon, Israel, 12 July 2000) (pp. 7-14).
- Bateman, J. A., Kamps, T., Klein, J., & Reichenberger, K. (2001). Towards constructive text, diagram, and layout generation for information presentation. *Computational Linguistics*, 27(3), 409-449.
- Bateman, J. A., & Wildfeuer, J. (2014). A multimodal discourse theory of visual narrative. *Journal of Pragmatics*, 74, 180-208.
- Bazzanella, C. (1994). *Le facce del parlare. Un approccio pragmatico all'italiano parlato*. La Nuova Italia.
- Bearne, E. (2004). Multimodal texts: What they are and how children use them. In J. Evans (Ed.), *Literacy moves on* (pp. 16-30). David Fulton Publishers.
- Bernardi, C. (2000). Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della 'e'. *Progetto Alice*, 1(1), 11-21.
- Bernardini, C. (1997). Più parole che idee. In R. Calò & S. Ferreri (A cura di), *Il testo fa scuola. Libri di testo, linguaggi ed educazione linguistica* (pp. 61-71). La Nuova Italia.
- Bernardini, C., & De Mauro, T. (2003). *Contare e raccontare. Dialogo sulle due culture*. Laterza.
- Berruto, G., & Cerruti, M. (2017). *La linguistica: un corso introduttivo*. UTET Università.
- Bertolini, C. (2012). *Promuovere la comprensione del testo fin dalla scuola dell'infanzia*. Edizioni Junior.
- Bezemer, J., & Kress, G. (2010). Changing Text: A Social Semiotic Analysis of Textbooks. *Designs for Learning*, 3(1-2), 10-29.
- Bianchi, C. (2009). *Pragmatica cognitiva. I meccanismi della comunicazione*. Laterza.
- Blanché, R. (1973). *La logica e la sua storia* (Edizione critica di A. Menzio). Astrolabio-Ubaldini.
- Bolasco, S. (2013). *L'analisi automatica dei testi. Fare ricerca con il text mining*. Carocci.

- Bolondi, G., Canalini, R., Migliano, P., & Savioli, K. (2012) Le prove INVALSI di matematica nella classe seconda e quinta della scuola primaria. *Quaderni SNV-N. 1/2012 MAT*. https://www.formath.it/ita/invalsi/Quaderni_SNV_N1_MAT.pdf
- Borges, J. L. (2005). *L'aleph* (Edizione critica di F. Tentori Montalto). Feltrinelli.
- Botta, E., & Sbaragli, S. (2016). Il caso dell'altezza. Un sapere fondante. *Nuova secondaria*, XXXIV, 1, 112-116.
- Bowers, J. S. (2000). In defense of abstractionist theories of repetition priming and word identification. *Psychonomic Bulletin & Review*, 7, 83-99.
- Cacia, D., Papa, E., & Verdiani, S. (2013). *Dal mondo alle parole. Definizioni spontanee e dizionari d'apprendimento*. Società Editrice Romana.
- Calò, R., & Ferreri, S. (A cura di). (1997). *Il testo fa scuola. Libri di testo, linguaggi ed educazione linguistica*. La Nuova Italia.
- Calvino, I. (2010). *Eremita a Parigi. Pagine autobiografiche*. Mondadori.
- Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2020). I materiali didattici che vorrei: il punto di vista dei docenti di matematica. *Scuola Ticinese*, 337, 57-62.
- Canducci, M., Demartini, S., & Sbaragli, S. (2021). Plurale o singolare? Disomogeneità linguistica di numero nei manuali di matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado italiani. *Italiano a scuola*, 3, 99-132.
- Canducci, M., Rocci, A., & Sbaragli, S. (2021). The influence of multimodal textualization in the conversion of semiotic representations in Italian primary school geometry textbooks. *Multimodal Communication*, 10(2), 157-174. <https://doi.org/10.1515/mc-2020-0015>
- Canducci, M., Rocci, A., & Sbaragli, S. (in stampa). Inventio, dispositio, elocutio: tre lenti per l'analisi di argomentazioni nei libri di testo di geometria. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 10.
- Cardarello, R., & Bertolini, C. (2020). *Didattiche della comprensione del testo. Metodi e strumenti per la scuola primaria*. Carocci.
- Cattani, A. (1994). *Forme dell'argomentare. Il ragionamento tra logica e retorica*. Edizioni GB.
- Cavanagh, S. (2005). Math: the not-so-universal language. *Education Week*, 24(42), 1-22.
- Charmaz, K. (1995). Grounded theory. In J. Smith, R. Harré, & L. Langenhove (Eds.), *Rethinking methods in psychology* (pp. 27-65). Sage.

- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble* (pp. 103-117). LSD2-Imag, Université Joseph Fourier.
- Chiari, I. (2002). *Ridondanza e linguaggio. Un principio costitutivo delle lingue*. Carocci.
- Chini, M. (A cura di). (2010). *Topic, struttura dell'informazione e acquisizione linguistica*. Franco Angeli.
- Cohen, R. (1987). Analyzing the structure of argumentative discourse. *Computational Linguistics*, 13(1-2), 11-24.
- Colombo, A. (2002). *Leggere. Capire e non capire*. Zanichelli.
- Colombo, A. (2012). Quando la comprensione è un problema di chi scrive. In S. Baggio & Gruppo di Italiano scritto del GISCEL trentino (A cura di), *La comprensione. Studi linguistici* (pp. 67-85). Università di Trento.
- Colombo, A., & Pallotti, G. (A cura di). (2014). *L'italiano per capire*. Aracne.
- Cornificio (1993). *Rhetorica ad C. Herennium* (Edizione critica di G. Calboli). Pàtron.
- Corno, D. (2019). *Scrivere e comunicare. La scrittura in lingua italiana in teoria e in pratica*. Pearson.
- Corno, D., & Janner, B. (2009). *Come parlano i bambini a scuola. La varietà di parlato puerile della lingua italiana*. Mercurio.
- Cortelazzo, M. A. (1994a). *Lingue speciali, la dimensione verticale*. Unipress.
- Cortelazzo, M. A. (1994b). Testo scientifico e manuali scolastici. In M. L. Zambelli (A cura di), *La rete e i nodi. Il testo scientifico nella scuola di base* (pp. 3-14). La Nuova Italia.
- Cortelazzo, M. A. (2011). Scienza, lingua della. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*, Istituto dell'Enciclopedia. https://www.treccani.it/enciclopedia/lingua-della-scienza_%28Enciclopedia-dell%27Italiano%29/
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5, 44-48.
- D'Ambrosio, U. (2007). The role of mathematics in educational systems. *ZDM International Journal of Mathematics Education*, 39, 173-181.
- D'Amore, B. (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora.

- D'Amore, B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*, 14(1), 28-47.
- D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 15(2), 150-173.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*, 64, 33-46.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Pitagora.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 119-162.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. Dalle origini al miracolo greco. Vol. 1*. Dedalo.
- D'Amore B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia. Dal tramonto greco al medioevo. Vol. 2*. Dedalo.
- D'Amore B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia. Dal rinascimento al XVIII secolo. Vol. 3*. Dedalo.
- D'Amore B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia. Dal XVIII al XXI secolo. Vol. 4*. Dedalo.
- D'Aprile, M., Squillace, A., Armentano, P., Cozza, P., D'Alessandro, R., Lazzaro, C., Rossi, G., Scarnati, A., Scarpino, L., Servi, G., & Sicilia, R. (2004). Dillo con parole tue. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 27B(1), 31-51.
- Dardano, M. (2008). Capire la lingua della scienza. In M. Dardano & G. Frenguelli (A cura di), *L'italiano di oggi* (pp. 173-188). Aracne.
- Dell'Orletta, F., Montemagni, S., & Venturi, G. (2011). READ-IT: assessing readability of Italian texts with a view to text simplification. In *SLPAT '11 – SLPAT '11 Proceedings of the Second Workshop on Speech and Language Processing for Assistive Technologies* (Edimburgo, UK, 30 Luglio 2011) (pp. 73-83). Association for Computational Linguistics. <https://aclanthology.org/W11-2308.pdf>
- Demartini, S., & Ferrari, P. L. (2019). La virgola *splice* nei testi di studenti universitari: un problema solo in apparenza superficiale. In A. Ferrari, L. Lala, F. Pecorari & R.

- Stojmenova Weber (A cura di), *Punteggiatura, sintassi, testualità nella varietà dei testi italiani contemporanei* (pp. 225-236). Cesati.
- Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). *Numeri e parole*. Numero monografico di Scuola dell'Infanzia. Giunti.
- Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2018). Dalla parola al termine. Il cammino verso l'apprendimento del lessico della matematica nelle definizioni dei bambini. In L. Corrà (A cura di), *La lingua di scolarizzazione nell'apprendimento delle discipline non linguistiche* (pp. 79-101). Aracne. <http://www.aracneeditrice.it/index.php/pubblicazione.html?item=9788825518368>
- Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2020). Se la sintesi diventa un problema. Alcune caratteristiche del linguaggio specialistico della matematica in prospettiva didattica. In J. Visconti, M. Manfredini, & L. Coveri (A cura di), *Linguaggi settoriali e specialistici: sincronia, diacronia, traduzione, variazione. Atti del XV Congresso Internazionale SILFI, Genova, 28-30 maggio 2018* (pp. 487-494). Cesati.
- Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (sottomesso). Imparare la lingua della matematica in prospettiva interdisciplinare. Difficoltà di gestione dei termini specialistici dell'italiano della geometria all'ingresso della scuola secondaria di primo grado. *EL.LE. Educazione Linguistica. Language Education*, Edizioni Ca' Foscari.
- Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015). Geometria e narrazione alla scuola dell'infanzia: un "binomio fantastico". In S. Sbaragli & B. D'Amore (A cura di), *La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento. Atti degli Incontri con la matematica N. 29, Comune di Castel S. Pietro Terme, 6-7-8 novembre 2015* (pp. 67-72). Pitagora.
- Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019a). Le parole che "ingannano". La componente lessicale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. In B. Di Paola (A cura di), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva* (pp. 19-25). "Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 2 - Numero speciale n. 5, 2019. G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf
- Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019b). Lessico e geometria: tre aggettivi da evitare. *Portale Treccani, sezione Lingua Italiana*. Istituto della Enciclopedia Italiana. http://www.treccani.it/magazine/lingua_italiana/articoli/scritto_e_parlato/Italmatica2.html
- Demartini, S., Sbaragli, S., & Ferrari, A. (2020). L'architettura del testo scolastico di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado. *Italiano LinguaDue*, 12(2), 160-180. <https://riviste.unimi.it/index.php/promoitals/article/view/14979/13889>

- De Mauro, T. (1999). *GRADIT. Grande dizionario italiano dell'uso*. UTET. <https://dizionario.internazionale.it/>
- De Mauro, T. (2005). *La fabbrica delle parole. Il lessico e problemi di lessicologia*. UTET.
- De Mauro, T. (2014). *Minisemantica dei linguaggi non verbali e delle lingue*. Laterza.
- De Mauro, T. (2016a). *Il Nuovo vocabolario di base della lingua italiana*. <https://www.internazionale.it/opinione/tullio-de-mauro/2016/12/23/il-nuovo-vocabolario-di-base-della-lingua-italiana>
- De Mauro, T. (2016b). Non solo parole, non senza parole. In F. De Renzo & M. E. Piemontese (A cura di), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche* (pp. 27-35). Aracne.
- De Mauro, T. (2019). *Guida all'uso delle parole. Parlare e scrivere semplice e preciso per capire e farsi capire*. Laterza. (Edizione originale pubblicata nel 1980).
- De Mauro, T., Mancini, F., Vedovelli, M., & Voghera, M. (1993). *Lessico di frequenza dell'italiano parlato*. EtasLibri.
- De Renzo, F., & Piemontese, M. E. (2016). (A cura di). *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche*. Aracne.
- De Santis, C. (2011). Quantificatori. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia. http://www.treccani.it/enciclopedia/quantificatori_%28Enciclopedia-dell%27Italiano%29/
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37-65.
- Duval, R. (1998). *Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva?* Pitagora.
- Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(4), 585-619.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing.
- Eco, U. (1973). *Il segno*. Isedi.
- Enriques, F. (1931). Definizione. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia. http://www.treccani.it/enciclopedia/definizione_%28Enciclopedia-Italiana%29/

- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Routledge.
- Euclide (1970). *Elementi* (Edizione critica di A. Frajese & L. Maccioni). UTET.
- Ferrari, A. (2003). *Le ragioni del testo. Aspetti morfosintattici e interpuntivi dell'italiano contemporaneo*. Accademia della Crusca.
- Ferrari, A. (2004a). Le funzioni della virgola. Sintassi e intonazione al vaglio della testualità. In P. D'Achille (A cura di), *Generi, architetture e forme testuali, Atti del VII Convegno internazionale della Società internazionale di Linguistica e Filologia italiana (SILFI)* (pp. 107-127). Cesati.
- Ferrari, A. (A cura di). (2004b). *La lingua nel testo, il testo nella lingua*. Istituto dell'Atlante Linguistico Italiano.
- Ferrari, A. (2011). Tematica, struttura. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia. [https://www.treccani.it/enciclopedia/struttura-tematica_\(Enciclopedia-dell%27Italiano\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/struttura-tematica_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/)
- Ferrari, A. (2012). *Tipi di frase e ordine delle parole*. Carocci.
- Ferrari, A. (2014). *La linguistica del testo. Principi, fenomeni, strutture*. Carocci.
- Ferrari, A. (2017). Usi "estesi" del punto e della virgola nella scrittura italiana contemporanea. *La lingua italiana. Storia, strutture, testi, XIII*, 137-153.
- Ferrari, A. (2018). La virgola. In A. Ferrari, L. Lala, F. Longo, P. Pecorari, B. Rosi, & R. Stojmenova (A cura di), *La punteggiatura italiana contemporanea. Un'analisi comunicativo-testuale* (pp. 49-63). Carocci.
- Ferrari, A. (2019). *Che cos'è un testo*. Carocci.
- Ferrari, A., Lala, L., Longo, F., Pecorari, F., Rosi, B., & Stojmenova, R. (2018). *La punteggiatura italiana contemporanea. Un'analisi comunicativo-testuale*. Carocci.
- Ferrari, A., Lala L., & Zampese, L. (2021). *Le strutture del testo scritto. Teoria e esercizi*. Carocci.
- Ferrari, A., & Zampese, L. (2016). *Grammatica: parole, frasi, testi dell'italiano*. Carocci.
- Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 26A(4), 469-496.
- Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Pitagora.
- Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET.

- Ferreri, S. (2005). *L'alfabetizzazione lessicale. Studi di linguistica educativa*. Aracne.
- Ferreri, S. (2014). Metalinguisticità riflessiva: statuto teorico e potenzialità d'uso. In A. Colombo & G. Pallotti (A cura di), *L'italiano per capire* (pp. 29-45). Aracne.
- Fiorentino, G. (2011). Nominalizzazioni. In R. Simone R. (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*, Istituto dell'Enciclopedia. [https://www.treccani.it/enciclopedia/nominalizzazioni_\(Enciclopedia-dell%27Italiano\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/nominalizzazioni_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/)
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fornara, S. (2010a). *La punteggiatura*. Carocci.
- Fornara, S. (2010b). Lasciranno il segno. Punteggiatura e costruzione del testo nella scrittura di docenti in formazione. In D. Corno (A cura di), *La tastiera e il calamaio. Come si scrive all'Università, studi e ricerche* (pp. 231-249). Edizioni Mercurio.
- Fornara, S., Cignetti, L., Demartini, S., Guaita, M., & Moretti, A. (2015). Costruzione del testo e punteggiatura tra norma, uso e didattica negli elaborati del corpus Tlscrivo. In J. Miecznikowski, M. Casoni, S. Christopher, A. Kamber, E. M. Pandolfi & A. Rocci (Eds), *Bullettin suisse de linguistique appliquée, Actes du colloque VALS-ASLA 2014 (Lugano, 12-14 février 2014)* (pp. 71-94). VALS-ASLA.
- Fornara, S., & Sbaragli, S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula* (pp. 33-38). Pitagora.
- Fornara, S., & Sbaragli, S. (2016). Che problema, queste parole! *La vita scolastica*, 2, 16-18.
- Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. In F. De Renzo & M. E. Piemontese (A cura di), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche* (pp. 211-224). Aracne.
- Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione, *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 1, 38-63. <https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/33>
- Freddi, M. (2014). *La linguistica dei corpora*. Carocci.
- Friedl, J. E. F. (2006). *Mastering Regular Expressions*. Paperback.

- Friese, S. (2019). *ATLAS.ti 8 Windows - User Manual*. ATLAS.ti Scientific Software Development GmbH.
- Giuliano, L., & La Rocca, G. (2008). *L'analisi automatica e semi-automatica dei dati testuali. Software e istruzioni per l'uso*. LED Edizioni Universitarie.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches in Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in mathematics education: A meta-analysis of three investigations. In N. A. Malara (Ed.), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July 1996* (pp. 13-22). CNR-MURST-University of Modena.
- Gotti, M. (2008). *Investigating Specialized Discourse*. Peter Lang.
- Grandi, N. (2010). Articolo. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia. [https://www.treccani.it/enciclopedia/articolo_\(Enciclopedia-dell%27Italiano\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/articolo_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/)
- Grosz, B. J., & Sidner, C. L. (1986). Attention, intentions, and the structure of discourse. *Computational Linguistics*, 12(3), 175-204.
- Gualdo, R., & Telve, S. (2011). *Linguaggi specialistici dell'italiano*. Carocci.
- Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. Arnold.
- Halliday, M. A. K. (1985). *An Introduction to Functional Grammar*. Edward Arnold.
- Halliday, M. A. K. (1992). *Lingua parlata e lingua scritta*. (Edizione critica di A. Dionisi). La Nuova Italia. (Original work published in 1985).
- Halliday, M. A. K. (1994). *An Introduction to Functional Grammar*. Arnold. (Original work published in 1985).
- Halliday, M. A. K. (2004a). *The Language of Science*. Continuum.
- Halliday, M. A. K. (2004b). *An Introduction to Functional Grammar* (C.M.I.M. Matthiessen, Ed.). Arnold. (Original work published 1985).
- Hilbert, D. (2009). *Fondamenti della geometria*. (Edizione originale di P. Canetta). Franco Angeli. (Original work published in 1909).
- Hovy, E. H. (1998). *Automatic generation of formatted text. Readings in intelligent user interfaces*. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

- International Federation of Library Association and Institutions. (2010). Guidelines for easy-to-read materials, *IFLA Report n. 120*.
- Iori, M. (2015). La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica. *Bollettino dei docenti di Matematica*, 71, 59-91.
- Jansen, H. (2003). *Densità informativa. Tre parametri linguistico-testuali. Uno studio contrastivo inter- ed intralinguistico*. Museum Tusculanum.
- Jewitt, C., Bezemer, J., & O'Halloran, K. L. (2016). *Introducing Multimodality*. Routledge.
- Ježek, E. (2005). *Lessico: classi di parole, strutture, combinazioni*. il Mulino.
- Ježek, E. (2010). Definizione lessicale. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia. [https://www.treccani.it/enciclopedia/definizione-lessicale_\(Enciclopedia-dell%27Italiano\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/definizione-lessicale_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/)
- Johnson-Laird, P. (1983). *Mental models*. Cambridge University Press.
- Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(9), 2481-2502.
- Kjeldsen, J. E. (2015). The study of visual and multimodal argumentation. *Argumentation*, 29(2), 115-132.
- Knud, L. (1994). *Information structure and sentence form. Topic, focus, and the mental representations of discourse referents*. Cambridge University Press.
- Kopperschmidt, J. (1985). An analysis of argumentation. In T. A. van Dijk (Ed.), *Handbook of Discourse Analysis*. Vol. II. *Dimensions of Discourse* (pp. 159-168). Academic Press.
- Korzen, I. (2020). *Testi tecnici e testualità. Complessità e densità informativa*. In J. Visconti, M. Manfredini & L. Coveri (A cura di), *Linguaggi settoriali e specialistici: sincronia, diacronia, traduzione, variazione. Atti del XV Congresso Internazionale SILFI, Genova, 28-30 maggio 2018* (pp. 97-103). Cesati.
- Kutschera, F. von (1979). *Filosofia del lenguaje*. Gredos.
- La Grassa, M., & Troncarelli, D. (2014). Comprendere le scienze attraverso i manuali scolastici. In A. Colombo & G. Pallotti (A cura di), *L'italiano per capire* (pp. 293-309). Aracne.
- La Grassa, M., & Troncarelli, D. (2015). Imparare l'italiano attraverso lo studio delle scienze. In M. Ostinelli (A cura di), *La didattica dell'italiano. Problemi e prospettive*

- (pp. 149-159). Edizione del Dipartimento formazione e apprendimento Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana.
- Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135.
- Laborde, C. (2004). Come la geometria dinamica può rinnovare i processi di mediazione delle conoscenze matematiche nella scuola primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La Didattica della matematica: una scienza per la scuola. Atti del XVIII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica* (pp. 19-28). Pitagora.
- Lakoff, G., & Nùñez, R. (2005). *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. (M. Bertuccelli Papi, Trans.). Bollati Boringhieri. (Original work published in 2000).
- Lala, L. (2011). Testo, tipi di. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*, Istituto dell'Enciclopedia. https://www.treccani.it/enciclopedia/tipi-di-testo_%28Enciclopedia-dell%27Italiano%29/
- LaSpina, J. A. (1988). *The visual turn and the transformation of the textbook*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lavinio, C. (2000). Tipi testuali e processi cognitivi. In F. Camponovo & A. Moretti (A cura di), *Didattica ed educazione linguistica* (pp. 125-144). La Nuova Italia.
- Lavinio, C. (2004). *Comunicazione e linguaggi disciplinari. Per un'educazione linguistica trasversale*. Carocci.
- Lavinio, C. (2018). Centralità e trasversalità della lingua di scolarizzazione. In L. Corrà (A cura di), *La lingua di scolarizzazione nell'apprendimento delle discipline non linguistiche* (pp. 19-41). Aracne.
- Lawson, A. E., & Renner, J. W. (1975). Relationships of concrete and formal operational science subject matter and the developmental level of the learner. *Journal of research in science teaching*, 12, 347-358.
- Levinson, S. C. (1983). *La pragmatica*. (M. Bertuccelli Papi, Trans.). il Mulino. (Original work published in 1983).
- Levorato, M. C. (2000). *Le emozioni della lettura*. il Mulino.
- Loiero, S., & Lugarini, E. (2019). *Tullio de Mauro: Dieci tesi per una scuola democratica*. Cesati.
- Loffler-Laurian, A.-M. (1983). Typologie des discours scientifiques: Deux approches. *Etudes de linguistique appliquée*, 51, 8-20.

- Lombardi Vallauri, E. (2015). *La struttura informativa. Forma e funzione negli enunciati linguistici*. Carocci.
- Longacre, R. E. (1983). *Some Aspects of Text Grammars*. Springer.
- Lucisano, P., & Piemontese, M. E. (1988). GULPEASE. Una formula per la predizione della difficoltà dei testi in lingua italiana. *Scuola e Città*, 3, 110-124.
- Lumbelli, L. (2009). *La comprensione come problema. Il punto di vista cognitivo*. Laterza.
- Maier, H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.
- Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 298-305.
- Mann, W. C., & Thompson, S. A. (1988). Rhetorical structure theory: toward a functional theory of text organization. *Text*, 8(3), 243-281.
- Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Tecnodid.
- Mastidoro, N. (2001). *Linguistica applicata alla leggibilità: considerazioni teoriche e applicazioni*. Armando editore.
- Merchant, B. (1999). Ghosts in the classroom: unavoidable casualties of a principal's commitment to the status quo. *Journal of Education for Students Placed at Risk*, 4(2), 153-171.
- Milesi, P., & Catellani, P. (2002). L'analisi qualitativa di testi con il programma Atlas.ti. In B. Mazzara (A cura di), *Metodi qualitativi in psicologia sociale. Prospettive teoriche e strumenti operativi* (pp. 283-304). Carocci.
- Mortara Garavelli, B. (1991). Tipologie di testi: categorie descrittive e generi testuali. In M. G. Lo Duca (A cura di), *Scrivere nella scuola media superiore* (pp. 9-23). La Nuova Italia.
- Mortara Garavelli, B. (2005). *Prontuario di punteggiatura*. Laterza.
- Mortara Garavelli, B. (2020). *Manuale di retorica*. Bompiani (Edizione originale pubblicata nel 1988).
- Moser, M., & Moore, J. M. (1996). Toward a synthesis of two accounts of discourse structure. *Computational Linguistics*, 22(3), 409-419.
- Nemirovsky, R., & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. Gestures and multimodality in the construction of mathematical meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 159-174.

- Nesselmann, G. H. F. (1842). *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra, Nach den Quellen bearbeitet*. Reimer.
- Notarbartolo, D. (2017). *Competenze testuali per la scuola*. Carocci.
- O'Halloran, K. L. (2015). The language of learning mathematics: A multimodal perspective. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 40, 63-74.
- O'Halloran, K. L., & Smith, B. A. (2012). Multimodal text analysis. In C. A. Chapelle (Ed.), *Encyclopaedia of applied linguistics*. Wiley-Blackwell.
- Ogden, C. K., & Richards, I. A. (1989). *The Meaning of Meaning: A Study of the Influence of Language upon Thought and of the Science of Symbolism*. With a new introduction by Umberto Eco. Harvest/HBJ. (Original work published in 1923).
- Ondelli, S., & Nadalutti, P. (2017). Distanza intertestuale e lingua fonte: premesse teoriche, compilazione di un corpus e procedure di analisi. In G. Palumbo (A cura di), *Testi, corpora, confronti interlinguistici: approcci qualitativi e quantitativi* (pp. 27-42). EUT Edizioni Università di Trieste.
- Paivio, A. (1986). *Mental representation. A dual coding approach*. Oxford University Press.
- Paoletti, G. (2004). Writing-to-learn and graph drawing as aids for the integration of text and graphs. In G. Rijlaarsdam, H. Van den Bergh, & M. Couzijn (Eds.), *Studies in writing. Effective learning and teaching or writing* (pp. 587-598). Kluwer Academic Publishers.
- Paoletti, G. (2007a). Problems in the integration of text and graphs. *OpenstarTS*. <http://hdl.handle.net/10077/2545>
- Paoletti, G. (2007b). Ma gli studenti ri-leggono? Monitoraggio della comprensione e revisione degli appunti. *Psicologia dell'Educazione*, 1, 9-11.
- Paoletti, G. (2011). *Comprendere testi con figure. Immagini, diagrammi e grafici nel design per l'istruzione*. Franco Angeli.
- Pascual, E. (1993). Integrating text formatting and text generation. In G. Adorni & M. Zock (Eds.), *Trends in Natural Language Generation: An Artificial Intelligence Perspective* (pp. 205-221). Springer.
- Peek, J. (1994). Enhancing graphic-effects in instructional texts: influencing learning activities. In W. Schnotz & N. Kulhavy (Eds.), *Comprehension of Graphics* (pp. 291-302). North Holland.
- Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2013). *Trattato dell'argomentazione. La nuova retorica*. (C. Schick, M. Mayer & E. Barassi, Trans.) Giulio Einaudi editore. (Original work published in 1958).

- Perkins, I., & Flores, A. (2002). Mathematical notations and procedures of recent immigrant students. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(6), 346-351.
- Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development*, 15, 1-12.
- Piazza, F. (2015). *La Retorica di Aristotele. Introduzione alla lettura*. Carocci.
- Piemontese, M. E. (1991). Scrittura e leggibilità: «Due parole». In M. A. Cortelazzo (A cura di), *Scrivere nella scuola dell'obbligo. Quaderni del GISCEL* (pp. 151-167). La Nuova Italia.
- Piemontese, M. E. (1996). *Capire e farsi capire. Teorie e tecniche della scrittura controllata*. Tecnodid.
- Piemontese, M. E., & Cavaliere, L. (1998). Leggibilità e comprensibilità di sussidiari per le scuole elementari. In A. R. Guerriero (A cura di), *L'educazione linguistica e i linguaggi della scienza* (pp. 221-240). La Nuova Italia.
- Polanyi, L. (1988). A formal model of the structure of discourse. *Journal of Pragmatics*, 12(5-6), 601-638.
- Pollaroli, C., & Rocci, A. (2015). The argumentative relevance of pictorial and multimodal metaphor in advertising. *Journal of argumentation in context*, 4(2), 158-199.
- Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 91-95.
- Rigotti, E., & Greco, S. (2009). Argumentation as an object of interest and as a social and cultural resource. In N. M. Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and education: Theoretical foundations and practices* (pp. 1-61). Springer.
- Rigotti, E., & Greco, S. (2019). *Inference in argumentation: A topics-based approach to argument schemes*. Springer.
- Rocci, A. (1996). *Valori comunicativi della posizione dell'aggettivo in italiano*. Vita e pensiero.
- Rocci, A. (2017). Ragionevolezza dell'impegno persuasivo. In P. Nanni, E. Rigotti & C. Wolfsgruber (A cura di), *Argomentare per un rapporto ragionevole con la realtà* (pp. 88-120). Fondazione per la Sussidiarietà.
- Rocci, A., & Pollaroli, C. (2018). Introduction: Multimodality in argumentation. *Semiotica*, 2018(220), 1-17.
- Rossari, C. (1994). *Les opérations de reformulation*. Peter Lang AG.

- Roth, W. M. (Ed.). (2009). *Mathematical representation at the interface of body and culture*. Information Age Publishing.
- Rovere, G. (2010). Linguaggi settoriali. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*, Istituto dell'Enciclopedia. [https://www.treccani.it/enciclopedia/linguaggi-settoriali_\(Enciclopedia-dell%27Italiano\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/linguaggi-settoriali_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/)
- Sabatini, F. (1999). "Rigidità-esplicitezza" vs "elasticità-implicitezza": possibili parametri massimi per una tipologia dei testi. In G. Skytte & F. Sabatini (A cura di), *Linguistica testuale comparativa. In memoriam Maria-Elisabeth Conte. Atti del Congresso interannuale della Società di Linguistica Italiana* (Copenhagen, 5-7 febbraio 1998) (pp. 141-172). Museum Tusculanum Press.
- Sabena, C., Krause, C., & Maffia, A. (2016). L'analisi semiotica in ottica multimodale: dalla costruzione di un quadro teorico al networking con altre teorie. *XXXIII Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della matematica*. https://www.researchgate.net/profile/Andrea_Maffia/publication/292986820_L'analisi-semiotica-in-ottica-multimodale-dalla-costruzione-di-un-quadro-teorico-al-networking-con-altre-teorie/links/56b46adb08ae5deb2658f68c/Lanalisi-semiotica-in-ottica-multimodale-dalla-costruzione-di-un-quadro-teorico-al-networking-con-altre-teorie.pdf
- Sachan, M., Dubey, A., Hovy, E. H., Mitchell, T. M., Roth, D., & Xing, E. P. (2020). Discourse in multimedia: A case study in extracting geometry knowledge from textbooks. *Computational Linguistics*, 45(4), 627-665.
- Salvi, G. (2013). *Le parti del discorso*. Carocci.
- Salvi, G., & Vanelli, L. (2004). *Nuova grammatica italiana*. il Mulino.
- Saussure De, F. (2009). *Corso di linguistica generale*. (T. De Mauro, Traduzione, Introduzione e commento). Laterza. (Edizione originale pubblicata nel 1916).
- Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, 1, 57-71.
- Sbaragli, S. (2006a). L'armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali. In S. Sbaragli (A cura di), *La Matematica e la sua Didattica, vent'anni di impegno. Atti del Convegno Internazionale omonimo* (pp. 257-260). Carocci.
- Sbaragli, S. (2006b). Le misconcezioni in aula. In G. Boselli & M. Seganti (A cura di), *Dal pensare delle scuole: riforme* (pp. 130-139). Armando Editore.
- Sbaragli, S. (2008). Base e altezza. *Rubrica: I ferri del mestiere. Il giornale della formazione. La Vita Scolastica*, 3, 28.

- Sbaragli, S. (2009). Orizzontale, verticale e obliquo. *La Vita Scolastica*, 1-2, 20-22.
- Sbaragli, S. (2010). Qui cade sua... altezza. *La Vita Scolastica*, 18, 25-27.
- Sbaragli, S. (2011). Incoerenze nelle intenzionalità degli insegnanti tra aspetti concettuali, culturali e semiotici dell'angolo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34(3), 373-386.
- Sbaragli, S. (2012). Il ruolo delle misconcezioni nella didattica della matematica. In G. Bolondi & M. I. Fandiño Pinilla (A cura di), *I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica* (pp. 121-139). Edises.
- Sbaragli, S. (2015). I pericoli del "quadretto". *La Vita Scolastica*, 8, 16-18.
- Sbaragli, S. (2016). L'importanza dei saperi fondanti. Il caso dell'altezza dei poligoni. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La matematica e la sua didattica. Convegno del trentennale* (pp. 35-40). Pitagora.
- Sbaragli, S. (2017). Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, A-B(40), 227-248.
- Sbaragli, S. (2020). La complessità nel definire in matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Didattica della matematica disciplina scientifica per una scuola efficace* (pp. 19-22). Pitagora.
- Sbaragli, S. (2021). (A cura di). *Didattica della matematica, Dalla ricerca alle pratiche didattiche. Vol. 9. Numero speciale dedicato al tema "Italmatica"*. <https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/issue/view/12>
- Sbaragli, S., Canducci, M., & Demartini, S. (2021). Le modalità logico-argomentative nei testi scolastici di geometria della scuola elementare e media in lingua italiana. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 9, 9-27.
- Sbaragli, S., Demartini, S., & Franchini, E. (2021). Le difficoltà di comprensione e di gestione dei termini specialistici della geometria all'ingresso della scuola secondaria di primo grado. *La matematica e la sua didattica*, 29(1), 7-37.
- Sbaragli, S., Demartini, S., Franchini, E., & Canducci, M. (2020). Grado di soddisfazione e utilizzo del libro di testo di matematica da parte dei docenti di scuola primaria italiana. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete*, 20(3), 132-153. <http://dx.doi.org/10.13128/form-9244>
- Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Dipartimento Formazione e Apprendimento. Scuola Universitaria della svizzera italiana.

- Sbaragli, S., & Franchini, E. (2017). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare*. Dipartimento formazione e apprendimento. Scuola Universitaria della svizzera italiana.
- Sbaragli, S., & Santi, G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 4(2), 117-157.
- Sbaragli, S., & Santi, G. (2012). Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo. *Bollettino dei docenti di matematica*, 65, 35-55.
- Sbisà, M. (A cura di). (1978). *Gli atti linguistici. Aspetti e problemi di filosofia del linguaggio*. Feltrinelli.
- Sbisà, M. (1999). È implicito. Allora è importante. *Italiano & Oltre*, 1, 16-25.
- Sbisà, M. (2007). *Detto non detto. Le forme della comunicazione implicita*. Laterza.
- Sbisà, M. (2009). *Linguaggio, ragione, interazione. Per una pragmatica degli atti linguistici*. EUT Edizioni. Università di Trieste.
- Schnotz, W. (1991). Metacognition and selfregulation in text processing: some comments. In M. Carretero, M. Pope, R. J. Simons & T. L. Pozo (Eds.), *Learning and Instruction: European Research in an International Context* (Vol. 3) (pp. 365-375). Pergamon.
- Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). Cambridge University Press.
- Serfati. M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Histoire et perspectives sur les mathématiques*. Université Paris I.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E., Yackel, & K. McClain (Eds), *Symbolizing and Communicating: Perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37-98). Erlbaum.
- Snow, C. P. (2005). *Le due culture*. (A. Carugo, Trans.). Marsilio. (Original work published in 1959).
- Speranza, F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Pitagora.

- Tettamanti, M. (2020). *Il cervello sintattico*. Carocci.
- Thibault, P. J. (2001). Multimodality and the school science textbook. In C. T. Torsello-Taylor, G. Brunetti & N. Penello (A cura di), *Corpora testuali per ricerca, traduzione e apprendimento linguistico* (pp. 293-335). Unipress.
- Thompson, P. W., & Sfard, A. (1994). Problems of reification: Representations and mathematical objects. In D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - North America, Plenary Sessions Vol. 1* (pp. 1-32). Louisiana State University.
- Tognini-Bonelli, E. (2001). *Corpus Linguistics at Work*. John Benjamins.
- Tonani, E. (2010). *Il romanzo in bianco e nero. Ricerche sull'uso degli spazi bianchi e dell'interpunzione nella narrativa italiana*. Cesati.
- Tonani, E. (2011). Virgola. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*, Istituto dell'Enciclopedia. https://www.treccani.it/enciclopedia/virgola_%28Enciclopedia-dell%27Italiano%29/
- Toulmin, S. E. (1975). *Gli usi dell'argomentazione*. (G. Bertoldi, Trans.). Rosenberg & Sellier. (Original work published in 1958).
- Van den Broek, P., Kremer, K. E., Lynch, J. S., Butler, J., White, M. J., & Lorch, E. P. (2005). Assessment of comprehension abilities in young children. In S. Paris & S. Stahl (Eds.), *New directions in assessment of reading comprehension* (pp. 107-130). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Van Dijk, T. A. (1972). *Some Aspects of Text Grammars: A study in theoretical linguistics and poetics*. Mouton & Co.
- Van Eemeren, F. H. (2013). In what sense do modern argumentation theories relate to Aristotle? The case of pragma-dialectics. *Argumentation*, 27(1), 49-70.
- Vardanega, A. (2008). *L'analisi dei dati qualitativi con Atlas.ti*. Aracne.
- Viale, M. (2010). *La diatesi passiva nella storia dell'italiano. Analisi di testi scientifici e narrativi tra Seicento e Ottocento*. Cleup.
- Viale, M. (2019). *I fondamenti linguistici delle discipline scientifiche. L'italiano per la matematica e le scienze a scuola*. Cleup.
- Villani, V., & Berni, M. (2003). *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (aritmetica e algebra)*. Pitagora.
- Voghera, M. (2004). La distribuzione delle parti del discorso nel parlato e nello scritto. In R. Van Deyck, R. Sornicola & J. Kabatèk (Eds.), *La variabilité en langue, I, Langue*

- parlée et langue écrite dans le présent et dans le passé, II. Les quatre variations. Communication & Cognition (Studies in Language, 8) (pp. 261-284). Gand.*
- Voghera, M. (2010). Lingua parlata. In R. Simone, (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*, Istituto dell'Enciclopedia. [https://www.treccani.it/enciclopedia/lingua-parlata_\(Enciclopedia-dell%27Italiano\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/lingua-parlata_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/)
- Waller, R. (1987). *The typographic contribution to language: towards a model of typographic genres and their underlying structures* [PhD Thesis, Department of Typography & Graphic, University of Reading].
- Waller, P. P., & Flood, C. T. (2016). Mathematics as a universal language: transcending cultural lines. *Journal for Multicultural Education*, 10(3), 294-306.
- Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity. Learners generating examples*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Werlich, E. (1982). *A text grammar of English*. Quelle & Meyer.
- Weidenmann, B. (1994). Codes of instructional pictures. In W. Schnotz & N. Kulhavy (Eds.), *Comprehension of Graphics* (pp. 29-42). North Holland.
- Wilson, D. (2011). The conceptual-procedural distinction: Past, present and future. In V. Escandell-Vidal, M. Leonetti, & A. Ahern (Eds.), *Procedural meaning: Problems and perspectives* (pp. 3-31). Emerald Group Publishing.
- Wittgenstein, L. (1967). *Ricerche filosofiche*. (R. Piovesan & M. Trinchero, Trans.) Einaudi. (Original work published in 1953).
- Wittgenstein, L. (1976). *Osservazioni filosofiche*. (M. Rossi, Trans.). Einaudi. (Original work published in 1964).
- Zambelli, M. L. (A cura di). (1994). *La rete e i nodi. Il testo scientifico nella scuola di base*. La Nuova Italia.
- Zambelli, M. L. (2014). Semplificare i testi di studio: quando, come. *Italiano Lingua-Due*, 1, 327-341.

Bibliografia corpus DFA-Italmatica

1 Corpus italiano

II – III scuola primaria	
Codice corpus	Titoli
1_2	Costa, E., Doniselli, L., & Taino, A. (2017). <i>Nuvola. Discipline volume unico</i> . Volume 2. La Spiga Edizioni.
1_3	Costa, E., Doniselli, L., & Taino, A. (2017). <i>Nuvola. Discipline matematica-scienze</i> . Volume 3. La Spiga Edizioni.
2_2	Luise, L., Bordin, L., & Guzzo, E. (2017). <i>Sulle ali di Pepe. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Fabbri Editori.
2_3	AA. VV. (2017). <i>Sulle ali di Pepe. Disciplina matematica</i> . Volume 3. Fabbri Editori.
3_2	Rizzolito, G., & Tordella, A. (2017). <i>Io io so. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Mondadori scuola.
3_3	Rizzolito, G., & Tordella, A. (2017). <i>Io io so. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Mondadori scuola.
4_2	Bartolucci, T., Battiston, E., Cantarini, P., Gagliardini, M. L., & Papalini, P. (2017). <i>Giorni di scuola. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Raffaello scuola.
4_3	Bartolucci, T., Battiston, E., Cantarini, P., Gagliardini, M. L., & Papalini, P. (2017). <i>Giorni di scuola. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Raffaello scuola.
5_2	Mattiassich, M., & Conti, C. (2017). <i>Supereroi. Sussidiario delle discipline</i> . Volume 2. Il capitello.
5_3	Mattiassich, M., & Conti, C. (2017). <i>Supereroi. Sussidiario delle discipline</i> . Volume 3. Il capitello.
6_2	AA. VV. (2017). <i>A colori scopro. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Giunti scuola.
6_3	AA. VV. (2017). <i>A colori scopro. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Giunti scuola.

7_2	Galassi, M., & Romano, S. (2017). <i>Il super Paper libro. Discipline matematica-scienze</i> . Volume 2. Cetem.
7_3	Moretti, A., & Romano, S. (2017). <i>Il super Paper libro. Discipline matematica-scienze</i> . Volume 3. Cetem.
8_2	Puggioni, M., & Branda, D. (2016). <i>È tempo di volare. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Edizioni del borgo.
8_3	Puggioni, M., & Branda, D. (2016). <i>È tempo di volare. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Edizioni del borgo.
9_2	Zanier, M., Caspani, M. N., Riboldi, L., & Cigolini, P. (2017). <i>I viaggi di Papù. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Pearson.
9_3	Zanier, M. (2017). <i>I viaggi di Papù. Disciplina matematica</i> . Volume 3. Pearson.
10_2	AA. VV. (2016). <i>Amici di classe. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Giunti scuola.
10_3	AA. VV. (2016). <i>Amici di classe. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Giunti scuola.
11_2	Fabbri, C., Giarolli, S., Marchetti, O., Rigoni, G., & Toso, E. (2017). <i>Super favoloso! Discipline volume unico</i> . Volume 2. Editrice La Scuola.
11_3	Fabbri, C., Giarolli, S., Marchetti, O., Rigoni, G., & Toso, E. (2017). <i>Super favoloso! Discipline matematica-scienze</i> . Volume 3. Editrice La Scuola.
12_2	Mattiassich, M., Grandinetti, V., & Pepe, L. (2016). <i>Ci vuole un sorriso! Sussidiario delle discipline</i> . Volume 2. Editrice Piccoli.
12_3	Mattiassich, M., Grandinetti, V., & Pepe, L. (2016). <i>Ci vuole un sorriso! Discipline matematica-scienze-tecnologia</i> . Volume 3. Editrice Piccoli.
14_2	Girotti, G. (2016). <i>C'era una volta... una farfalla. Disciplina matematica</i> . Volume 2. Minerva scuola.
14_3	Girotti, G. (2016). <i>C'era una volta... una classe terza. Disciplina matematica</i> . Volume 3. Minerva scuola.
15_2	AA. VV. (2017). <i>Che idea! Discipline volume unico</i> . Volume 2. Gaia edizioni.

15_3	AA. VV. (2017). <i>Che idea! Discipline volume unico</i> . Volume 3. Gaia edizioni.
16_3	Bonci, L., Cigolini, P., & Pascali, L. (2016). <i>Storie curiose. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Pearson.
17_2	Prosperi, A., & Valerii, D. (2017). <i>A scuola insieme. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Lisciani.
17_3	Prosperi, A., & Valerii, D. (2017). <i>A scuola insieme. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Lisciani.
18_2	Bordi, G., Bertella, A., & Ronca, A. (2016). <i>Piccoli eroi. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Fabbri editori.
18_3	Bordi, G., Bertella, A., & Ronca, A. (2016). <i>Piccoli eroi. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Fabbri editori.
c1_2	Folloni, I. (2015). <i>Maggiolino. Libro delle discipline – matematica</i> . Volume 2. Gruppo editoriale Raffaello.
c1_3	Folloni, I. (2015). <i>Maggiolino. Libro delle discipline – matematica</i> . Volume 3. Gruppo editoriale Raffaello.
c2_2	AA. VV. (2014). <i>Mara e Meo. Il libro-quaderno dei numeri e delle scoperte</i> . Volume 2. De Agostini.
c2_3	AA. VV. (2014). <i>Mara e Meo. Il libro-quaderno dei numeri e delle scoperte</i> . Volume 3. De Agostini.
c4_2	Furlan, P., Santarossa, C., & Soldati, P. (2014). <i>Gufo Gulì. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Ardea Tredieci editori.
c4_3	Furlan, P., Santarossa, C., & Soldati, P. (2014). <i>Gufo Gulì. Discipline matematica-scienze</i> . Volume 3. Ardea Tredieci editori.
c5_2	Forni, L., Caspani, M. L., Riboldi, L., & Palazzo, G. (2014). <i>Alla fattoria di Laura. Discipline volume unico</i> . Volume 2. Pearson.
c5_3	Forni, L., Caspani, M. L., Riboldi, L., & Palazzo, G. (2014). <i>Alla fattoria di Laura. Discipline volume unico</i> . Volume 3. Pearson.

IV – V scuola primaria	
Codice corpus	Titoli
1_4	Bertella, A., & Parravicini, A. (2017). <i>Mapperchè. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 4. Fabbri scuola.
1_5	Bertella, A., & Parravicini, A. (2017). <i>Mapperchè. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 5. Fabbri scuola.
2_4	Girotti, G., & Monteverdi, C. (2017). <i>Capire il presente. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 4. Minerva scuola.
2_5	Girotti, G., & Monteverdi, C. (2017). <i>Capire il presente. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 5. Minerva scuola.
3_4	AA. VV. (2017). <i>La fabbrica dei saperi. Discipline matematica-scienze-tecnologia</i> . Volume 4. Giunti scuola.
3_5	AA. VV. (2017). <i>La fabbrica dei saperi. Discipline matematica-scienze-tecnologia</i> . Volume 5. Giunti scuola.
4_4	Gherardi, P. (2017). <i>Imparare a 360°. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 4. Pearson.
4_5	Gherardi, P. (2017). <i>Imparare a 360°. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 5. Pearson.
5_4	Blanc, C., Cavasino, R., & Mattiassich, M. (2017). <i>Tutto da scoprire. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 4. Editrice Piccoli.
5_5	Blanc, C., Cavasino, R., & Mattiassich, M. (2017). <i>Tutto da scoprire. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 5. Editrice Piccoli.
6_4	Carlioni, A., & Secchi, N. (2017). <i>Speciale discipline. Sussidiario scientifico matematica-scienze-tecnologia</i> . Volume 4. Raffaello scuola.
6_5	Carlioni, A., Mancinelli, B., Secchi, N., & Zagaglia, R. (2017). <i>Speciale discipline. Sussidiario volume unico</i> . Volume 5. Raffaello scuola.

7_4	Gandolfi, R., & Puggioni, M. (2017). <i>Il nuovo giramondo. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 4. Edizioni del borgo.
7_5	Gandolfi, R., & Puggioni, M. (2017). <i>Il nuovo giramondo. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 5. Edizioni del borgo.
8_4	Carta, M., Cattaneo, S., & Del Vecchio, R. (2016). <i>Sapere è... favoloso! Discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 4. Editrice La Scuola.
8_5	Carta, M., Cattaneo, S., & Del Vecchio, R. (2016). <i>Sapere è... favoloso! Discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 5. Editrice La Scuola.
9_4	AA. VV. (2017). <i>Scoprire insieme. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 4. Lisciani.
9_5	AA. VV. (2017). <i>Scoprire insieme. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 5. Lisciani.
10_4	Allevi, L., Cappelletti, M., & De Gianni, A. (2017). <i>Fantastiche discipline. Discipline matematica-scienze</i> . Volume 4. La Spiga edizioni.
10_5	Allevi, L., Cappelletti, M., & De Gianni, A. (2017). <i>Fantastiche discipline. Discipline matematica-scienze</i> . Volume 5. La Spiga edizioni.
11_4	Mosca, L., Negri, N., Pagano, R., & Rampoldi, P. (2016). <i>Scoprire si può. Sussidiario delle discipline volume unico</i> . Volume 4. Gaia edizioni.
11_5	Mosca, L., Negri, N., Pagano, R., & Rampoldi, P. (2016). <i>Scoprire si può. Sussidiario delle discipline volume unico</i> . Volume 5. Gaia edizioni.
12_4	Doronzio, G., & Romano, S. (2017). <i>Nautilus. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 4. CETEM.
12_5	Bonfigli, A., & Romano, S. (2017). <i>Nautilus. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 5. CETEM.

13_4	AA. VV. (2017). <i>Tanti modi per capire e studiare. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 4. De Agostini.
13_5	AA. VV. (2017). <i>Tanti modi per capire e studiare. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 5. De Agostini.
14_4	AA. VV. (2016). <i>Le meraviglie del sapere. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 4. Tredici editrice.
14_5	AA. VV. (2016). <i>Le meraviglie del sapere. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 5. Tredici editrice.
15_4	Bardi, S., & Raimondi, S. (2017). <i>Uno per tutti super! Discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 4. De Agostini.
15_5	Bardi, S., & Raimondi, S. (2017). <i>Uno per tutti super! Discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 5. De Agostini.
16_4	Bonci, L., Carai, M., Caspani, M. N., & Riboldi, L. (2016). <i>Pensare perché. Sussidiario delle discipline volume unico</i> . Volume 4. Pearson.
16_5	Bonci, L., Carai, M., Caspani, M. N., & Riboldi, L. (2016). <i>Pensare perché. Sussidiario delle discipline volume unico</i> . Volume 5. Pearson.
17_4	Corti, G., Falappa, M. A., & Morgese, R. (2016). <i>Everest. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 4. Raffaello scuola.
17_5	Corti, G., Falappa, M. A., & Morgese, R. (2016). <i>Everest. Sussidiario delle discipline matematica-scienze e tecnologia</i> . Volume 5. Raffaello scuola.
c2_4	Canali, T., & Girotti, G. (2014). <i>Wikisussi plus delle discipline matematica-scienze e tecnologie</i> . Volume 4. Minerva scuola.
c2_5	Canali, T., & Girotti, G. (2014). <i>Wikisussi plus delle discipline matematica-scienze e tecnologie</i> . Volume 5. Minerva scuola.
c3_4	Boscasso, L., Noffke, D., & Tesio, G. (2015). <i>Tutti a bordo. Sussidiario delle discipline volume unico</i> . Volume 4. Editrice Piccoli.
c3_5	Boscasso, L., Noffke, D., & Tesio, G. (2015). <i>Tutti a bordo. Sussidiario delle discipline volume unico</i> . Volume 5. Editrice Piccoli.

c4_4	Carai, M., Caspani, M. N., & Riboldi, L. (2014). <i>Sai perché. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 4. Pearson.
c4_5	Carai, M., Caspani, M. N., & Riboldi, L. (2014). <i>Sai perché. Sussidiario delle discipline matematica-scienze</i> . Volume 5. Pearson.
c5_4	Trentini, C., & Sciapeconi, I. (2014). <i>Il regno delle discipline. Discipline volume unico</i> . Volume 4. Raffaello scuola.
c5_5	Trentini, C., & Sciapeconi, I. (2014). <i>Il regno delle discipline. Discipline volume unico</i> . Volume 5. Raffaello scuola.

I - II - III scuola secondaria di primo grado	
Codice corpus	Titoli
1_6	Montemurro, A. (2015). <i>Math Genius corso di matematica</i> . Volume 1. De Agostini.
1_7	Montemurro, A. (2015). <i>Math Genius corso di matematica</i> . Volume 2. De Agostini.
2_6	Montemurro, A. (2013). <i>DigiMAT+. La geometria</i> . Volume 1. De Agostini.
2_7	Montemurro, A. (2013). <i>DigiMAT+. La geometria</i> . Volume 2. De Agostini.
3_6	Arpinati, A. M., & Musiani, M. (2015). <i>Matematica in azione. Geometria</i> . Volume 1. Zanichelli.
3_7	Arpinati, A. M., & Musiani, M. (2015). <i>Matematica in azione. Geometria</i> . Volume 2. Zanichelli.
4_6	Bertinetto, C., Metiäinen, A., Paasonen, J., & Voutilainen, E. (2013). <i>Contacil! Misure, spazio e figure</i> . Volume 1. Zanichelli.
4_7	Bertinetto, C., Metiäinen, A., Paasonen, J., & Voutilainen, E. (2013). <i>Contacil! Misure, spazio e figure</i> . Volume 2. Zanichelli.
4_8	Bertinetto, C., Metiäinen, A., Paasonen, J., & Voutilainen, E. (2013). <i>Contacil! Misure, spazio e figure</i> . Volume 3. Zanichelli.
5_6	Bonola, G., & Forno, I. (2014). <i>Matematica Teoria Esercizi plus. Geometria</i> . Volume A. Lattes.

5_7	Bonola, G., & Forno, I. (2014). <i>Matematica Teoria Esercizi plus. Geometria</i> . Volume B. Lattes.
5_8	Bonola, G., & Forno, I. (2014). <i>Matematica Teoria Esercizi plus. Geometria</i> . Volume C. Lattes.
6_6	Pernigo, U., & Tarocco, M. (2014). <i>Ubi Math. Matematica per il futuro. Geometria</i> . Volume 1. Le Monnier scuola.
6_7	Pernigo, U., & Tarocco, M. (2014). <i>Ubi Math. Matematica per il futuro. Geometria</i> . Volume 2. Le Monnier scuola.
7_6	Vacca, R., Artuso, B., & Bezzi, C. (2017). <i>Tutti Matematici. Geometria</i> . Volume 1. Atlas.
7_7	Vacca, R., Artuso, B., & Bezzi, C. (2017). <i>Tutti Matematici. Geometria</i> . Volume 2. Atlas.
8_6	Vacca, R., Artuso, B., & Bezzi, C. (2014). <i>Noi Matematici. Geometria</i> . Volume 1. Atlas.
8_7	Vacca, R., Artuso, B., & Bezzi, C. (2014). <i>Noi Matematici. Geometria</i> . Volume 2. Atlas.
9_6	Flaccavento Romano, G. (2014). <i>Obiettivo competenze</i> . Volume 1. Fabbri editori.
9_7	Flaccavento Romano, G. (2014). <i>Obiettivo competenze</i> . Volume 2. Fabbri editori.
10_6	Ferrando, L., & Sasso, L. (2017). <i>Al quadrato. Geometria</i> . Volume 1. Petrini.
10_7	Ferrando, L., & Sasso, L. (2017). <i>Al quadrato. Geometria</i> . Volume 2. Petrini.
11_6	Bonola, G., Forno, I., & Cossu, C. (2017). <i>Il genio e la regola. Geometria</i> . Volume A. Lattes.
11_7	Bonola, G., Forno, I., & Cossu, C. (2017). <i>Il genio e la regola. Geometria</i> . Volume B. Lattes.
11_8	Bonola, G., Forno, I., & Cossu, C. (2017). <i>Il genio e la regola. Geometria</i> . Volume C. Lattes.
12_6	Pernigo, U., & Tarocco, M. (2017). <i>Wiki Math. Geometria</i> . Volume 1. Le Monnier scuola.

12_7	Pernigo, U., & Tarocco, M. (2017). <i>Wiki Math. Geometria</i> . Volume 2. Le Monnier scuola.
13_6	Zarattini, M. (2016). <i>MATElive realtà idee competenze</i> . Volume 1. Pearson.
13_7	Zarattini, M. (2016). <i>MATElive realtà idee competenze</i> . Volume 1. Pearson.
14_6	Ferri, L., Matteo, A., Sgobbi, F., & Bruno, S. (2016). <i>Da zero a infinito</i> . Volume 1. Fabbri editore.
14_7	Ferri, L., Matteo, A., Sgobbi, F., & Bruno, S. (2016). <i>Da zero a infinito</i> . Volume 2. Fabbri editore.
16_6	Vacca, R., Artuso, B., & Bezzi, C. (2011). <i>Matematica per obiettivi e competenze. Geometria</i> . Volume 1. Atlas.
16_7	Vacca, R., Artuso, B., & Bezzi, C. (2011). <i>Matematica per obiettivi e competenze. Geometria</i> . Volume 2. Atlas.
18_6	Vivalda, S., Monticelli, M., Bori, G., & Minier, B. (2017). <i>Scacco matto! Geometria</i> . Volume 1. Loescher editore.
18_7	Vivalda, S., Monticelli, M., Bori, G., & Minier, B. (2017). <i>Scacco matto! Geometria</i> . Volume 2. Loescher editore.
19_6	Arpinati, A. M., & Musiani, M. (2014). <i>Libro visuale La matematica che ti serve. Geometria</i> . Volume 1. Zanichelli.
19_7	Arpinati, A. M., & Musiani, M. (2014). <i>Libro visuale La matematica che ti serve. Geometria</i> . Volume 2. Zanichelli.
c1_6	Ferrari, G., Cerini, M., Giallongo, D., & Sgandurra, C. (2017). <i>Numeri, forme e realtà. Geometria</i> . Volume 1. Trevisini editore.
c1_7	Ferrari, G., Cerini, M., Giallongo, D., & Sgandurra, C. (2017). <i>Numeri, forme e realtà. Geometria</i> . Volume 2. Trevisini editore.
c2_6	Fenizia, F., Moriani, O., & Nobel, P. (2014). <i>Del più e del meno. Geometria</i> . Volume 1. La Nuova Scuola.
c2_7	Fenizia, F., Moriani, O., & Nobel, P. (2014). <i>Del più e del meno. Geometria</i> . Volume 2. La Nuova Scuola.
c3_6	Cerini, M., Fiamenghi, R., & Giallongo, D. (2010). <i>Operazione matematica. Geometria</i> . Volume A. Trevisini editore.

c3_7	Cerini, M., Fiamenghi, R., & Giallongo, D. (2010). <i>Operazione matematica. Geometria</i> . Volume B. Trevisini editore.
c4_6	Cerini, M., Fiamenghi, R., & Giallongo, D. (2007). <i>Oggi "mate". Geometria</i> . Volume A. Trevisini editore.
c4_7	Cerini, M., Fiamenghi, R., & Giallongo, D. (2007). <i>Oggi "mate". Geometria</i> . Volume B. Trevisini editore.
c4_8	Cerini, M., Fiamenghi, R., & Giallongo, D. (2007). <i>Oggi "mate". Geometria</i> . Volume C. Trevisini editore.

2 Corpus svizzero


I – II – III scuola secondaria di primo grado - Canton Ticino	
Codice corpus	Titoli
T1_6	Bellini, L., Frapolli, A., Ghielmetti, C., Tartini, R., & Villa, O. (2012). <i>Base matematica</i> . Volume 1. Edizioni Vignalunga.
T1_7	Bellini, L., Frapolli, A., Ghielmetti, C., Tartini, R., & Villa, O. (2012). <i>Base matematica</i> . Volume 2. Edizioni Vignalunga.
T2_6	Arrigo, G., Bottani, R., Frapolli, A., & Poletti, R. (1993). <i>Dimensione matematica</i> . Volume 1. Giampiero Casagrande editore.
T2_7	Arrigo, G., Bertoletti, A., Gerber, M., & Ghielmetti, C. (1995). <i>Dimensione matematica</i> . Volume 2. Giampiero Casagrande editore.
T2_8	Arrigo, G., Beretta, C., Frapolli, A., & Ghielmetti, C. (1991). <i>Dimensione matematica</i> . Volume 3. Giampiero Casagrande editore.
T3_6	Arrigo, G., Corrent, G., Mainini, G., & Marchio, A. (2006). <i>Atolli matematici</i> . Volume 1. Giampiero Casagrande editore.
T3_7	Arrigo, G., Bollini, V., Corrent, G., & Mainini, G. (2007). <i>Atolli matematici</i> . Volume 2. Giampiero Casagrande editore.

II – III – IV – V – VI scuola primaria - Canton Grigioni	
Codice corpus	Titoli
G1_2	AA. VV. (2012). <i>Matematica 2</i> . Lehrmittelverlages Zürich.
G1_3	AA. VV. (2013). <i>Matematica 3</i> . Lehrmittelverlages Zürich.
G1_4	AA. VV. (2014). <i>Matematica 4</i> . Lehrmittelverlages Zürich.
G1_5	AA. VV. (2015). <i>Matematica 5</i> . Lehrmittelverlages Zürich.
G1_6	AA. VV. (2016). <i>Matematica 6</i> . Lehrmittelverlages Zürich.

I scuola secondaria di primo grado - Canton Grigioni	
Codice corpus	Titolo
G1_7	AA. VV. (2012). <i>Matematica 1</i> . Lehrmittelverlages Zürich.

*Volume di pagine 368,
carta Coral book, 100 gr.*

*Finito di stampare nel settembre 2021
dalla Dedalo litostampa srl, Bari*



Questo volume contiene le riflessioni, le analisi e i risultati emersi nell'ambito del progetto di ricerca *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la ricerca scientifica, 2018-2022). L'obiettivo è una sempre più necessaria visione sinergica dei rapporti tra due discipline – la matematica e la lingua italiana – considerate tradizionalmente piuttosto distanti. Alla separazione tra i due “mondi” viene qui contrapposta una prospettiva comune e integrata, nella quale il dialogo interdisciplinare diventa strumento per indagare in profondità uno dei dispositivi tutt'oggi fondamentali della didattica: il testo scolastico.

Gli autori e le autrici

Michele Canducci, Amos Cattaneo, Elena Franchini, Dario Raffaele e Silvia Sbaragli – Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento (Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana).

Silvia Demartini e Simone Fornara – Centro competenze didattica dell'italiano lingua di scolarizzazione del Dipartimento formazione e apprendimento (Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana).

Angela Ferrari – Istituto di Italianistica (Università di Basilea).

Pier Luigi Ferrari – Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica (Università del Piemonte Orientale).

Daniele Puccinelli – Dipartimento tecnologie innovative (Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana).

Andrea Rocci – Istituto di argomentazione, linguistica e semiotica (Università della Svizzera italiana).

Matteo Viale – Dipartimento di Filologia Classica e Italianistica (Università di Bologna).

ITAL
MAT
TICA